Ch10 Infinite Sequences and Series

10.1 Sequences

من المعروف أن المتتابعات هي قائمة من الأعداد المرتبة ، وتكتب على الصورة

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

مثال ذلك ، متتابعة الأعداد الأولية

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots$$

التعريف الرياضي للمتتابعة أنها دالة مجالها الأعداد الطبيعية / حيث صورة ١ هو a_1 وصورة 2 هو a_2 وبشكل عام صورة n هو العنصر a_n / التعريف التالي يوضح التعريف العام لها.

Def: An infinite sequence (or sequence) of numbers is a fun whose domain is the set of integers grater than or equal to some integer n_0.

عادة نأخذ $n_0=1$ ويكون المجال هو في هذه الحالة الأعداد الطبيعية ، وقد يكون غير ذلك.
تسمى $a(1)=a_1$ بالحد الأول (first term) و $a(2)=a_2$ بالحد الثاني ،
وبشكل عام يسمى $a(n)=a_n$ بالحد النوني (nth-term) وتسمى n بـ index.

Examples: (1) The seq $a: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ defined by $a_n = a(n) = \sqrt{n}$ has first term $a_1 = \sqrt{1}$, second term $a_2 = \sqrt{2}$ and we can write it in the form

$$\{a_n\} = \{\sqrt{n}\} = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \dots, \sqrt{n}, \dots\}$$

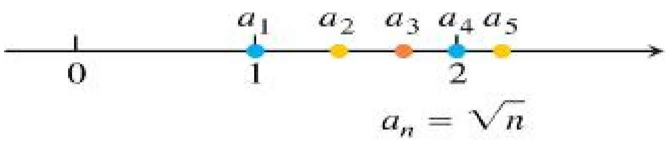
(2) The sequence $\{b_n\} = \{(-1)^{n+1} \frac{1}{n}\}$ has the form

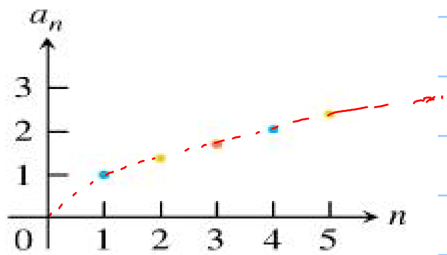
$$\{b_n\} = \{1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{4}, \dots\}$$

رسم المتتابعات

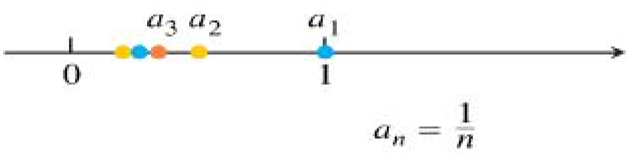
توجد طريقتين للتعبير عن المتتابعات هندسياً ، الأولى برسمها كدالة مجالها الأعداد الطبيعية كما الدوال ، والطريقة الثانية برسمها على خط الأعداد كما توضح الأمثلة التالية :

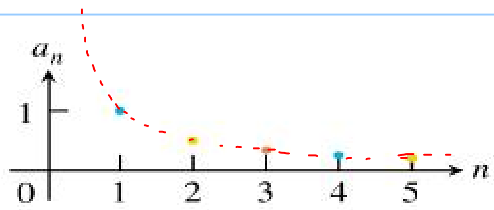
1) $\{a_n\} = \{\sqrt{n}\}$



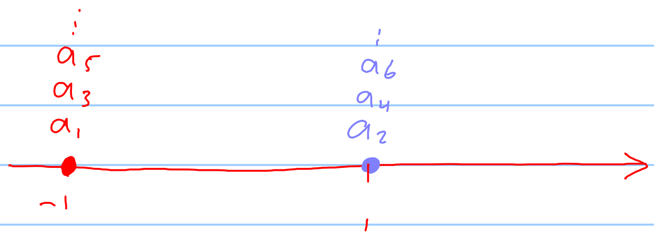


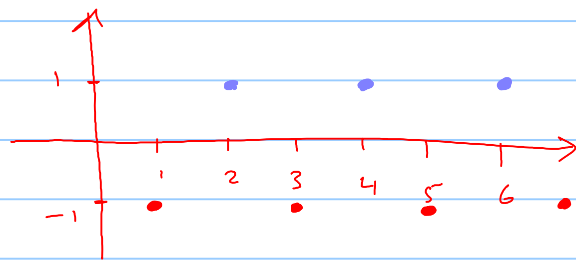
2) $\{a_n\} = \{\frac{1}{n}\}$





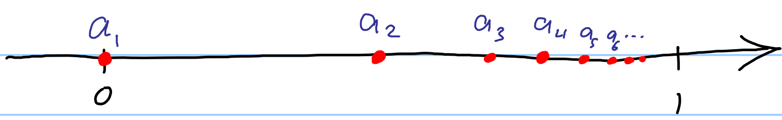
3) $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$





Convergence and Divergence

إذا تمعنا بدراسة المتتابعة $\{a_n\} = \{\frac{n-1}{n}\} = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\}$



نجد أنه كلما كبرت n كلما تقاربت قيم المتتابعة من الرقم 1 / في هذه الحالة / نقول
أن المتتابعة تقاربية لـ 1 (converges to 1) / في هذه الحالة نكتب

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1 \quad \text{أو} \quad \lim \frac{n-1}{n} = 1$$

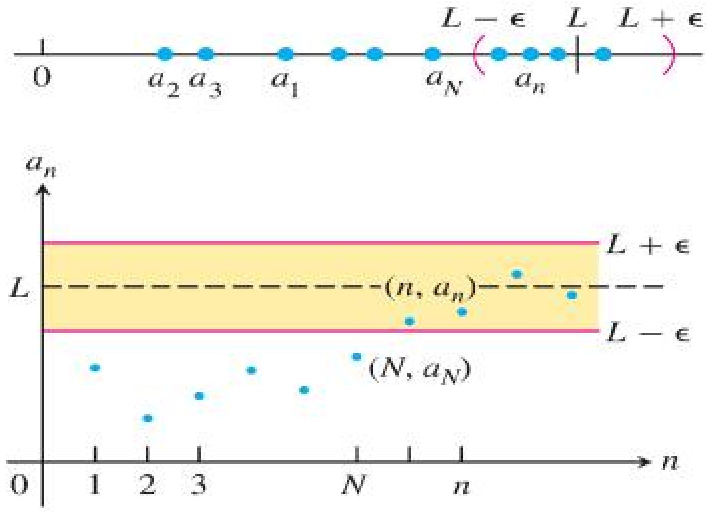
أو $\frac{n-1}{n} \longrightarrow 1$ as $n \longrightarrow \infty$

أو $\frac{n-1}{n} \longrightarrow 1$

DEFINITIONS The sequence $\{a_n\}$ **converges** to the number L if for every positive number ϵ there corresponds an integer N such that for all n,

$$n > N \quad \Rightarrow \quad |a_n - L| < \epsilon.$$

If no such number L exists, we say that $\{a_n\}$ **diverges**.



Examples:

1) $\{a_n\} = \{\frac{1}{n}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ converges to 0

so $\lim \frac{1}{n} = 0$

2) $\{a_n\} = \{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$ diverges

3) $\{a_n\} = \{n\} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ diverges

4) $\{a_n\} = \{k\} = \{k, k, k, \dots\}$ converges to k,

so $\lim k = k$.

ملحوظة : في المثال السابق / لاحظ أن التباعد في 2 يختلف عنه في 3 / حيث أن حدود المتتابعة في المثال (3) تتزايد في قيمتها بلا حدود عندما $n \to \infty$ بينما قيم حدود المتتابعة في المثال (2) ستبقى محدودة ، و للتمييز بين الحالتين / يمكن القول أن المتتابعة في المثال الثالث تتباعد لـ ∞ (diverges to ∞) ، ونكتب $\lim n = \infty$

Recursive Definitions: (Inductive Defs)

لاحظ أن الطريقة المعتادة لتعريف المتتابعات هو باستخدام قانون الحد العام للمتتابعة. توجد طريقة أخرى لتعريف المتتابعات استقرائياً (recursively) كالتالي:

1) إعطاء قيمة (قيم) مبدئية للحد أو الحدود الأولى من المتتابعة.

2) إعطاء قانون أو استقراء لحساب حدود المتتابعات اللاحقة بدلالة الحدود السابقة.

المثال التالي يوضح هذه الجزئية في تعريف المتتابعات:

Examples: 1) $a_1 = 1 \;,\quad a_n = a_{n-1} + 1 \;,\quad n \geq 2$

$\Rightarrow \quad a_2 = a_1 + 1 = 1 + 1 = 2 \;,\quad a_3 = a_2 + 1 = 2 + 1 = 3 \;,$

$a_4 = 3 + 1 = 4 \;,\quad a_5 = 4 + 1 = 5 \;,$ and so on.

Thus, $\{a_n\} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

لاحظ في هذا المثال أنه يمكنه إستنتاج الحد العام: $a_n = n$ وبالتالي

نستطيع إيجاد $a_{100} = 100$ مباشرة دون حساب الحدود التي تسبقه

2) $a_1 = 1 \;,\quad a_n = n\, a_{n-1} \;,\quad n \geq 2$

$\Rightarrow \quad a_2 = 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 1 = 2! \;,\quad a_3 = 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$

$a_4 = 4 \cdot a_3 = 4 \cdot 3! = 4! \;,$ and so on.

لاحظ أيضاً أننا في هذا المثال استطعنا أن نوجد قانون عام $a_n = n!$ وبالتالي

$$\{a_n\} = \{1, 2!, 3!, 4!, \dots, n!, \dots\}$$

3) $a_1 = 1 \;,\quad a_2 = 1 \;,$ and $a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \;,\quad n \geq 2$

so $a_3 = a_2 + a_1 = 2 \;,\quad a_4 = a_3 + a_2 = 3 \;,\quad a_5 = a_4 + a_3 = 5$

and so on, we get

$$\{a_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots\}$$

لاحظ هنا أن صيغة الحد العام من هذه المتتابعة ليس واضحاً، وعليه، إذا

أردنا إيجاد a_{100} ، يجب أن نوجد جميع الحدود التي تسبقه

Calculating Limits of Sequences

THEOREM 1 Let $\{a_n\}$ and $\{b_n\}$ be sequences of real numbers, and let A and B be real numbers. The following rules hold if $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ and $\lim_{n\to\infty} b_n = B$.

1. *Sum Rule:* $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$
2. *Difference Rule:* $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = A - B$
3. *Constant Multiple Rule:* $\lim_{n\to\infty}(k \cdot b_n) = k \cdot B$ (any number k)
4. *Product Rule:* $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$
5. *Quotient Rule:* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B}$ if $B \neq 0$

Examples: Use the facts that $\lim \frac{1}{n} = 0$ and $\lim K = K$ to evaluate the following limits:

1) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{-5}{n}\right) = -5 \lim \frac{1}{n} = -5 * 0 = \boxed{0}$

2) $\lim\left(\frac{5}{n^2}\right) = 5 \lim\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right) = 5 * \lim\frac{1}{n} * \lim\frac{1}{n}$
$= 5 * 0 * 0 = \boxed{0}$

3) $\lim\left(\frac{n-1}{n}\right) = \lim\left(1-\frac{1}{n}\right) = \lim 1 - \lim\frac{1}{n} = 1-0 = \boxed{1}$

4) $\lim_{n\to\infty} \frac{4-7n^6}{n^6+3} = \lim \frac{\left(\frac{4}{n^6}\right)-7}{1+\left(\frac{3}{n^6}\right)} = \frac{0-7}{1+0} = \boxed{-7}$

THEOREM 2—The Sandwich Theorem for Sequences Let $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, and $\{c_n\}$ be sequences of real numbers. If $a_n \le b_n \le c_n$ holds for all n beyond some index N, and if $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, then $\lim_{n\to\infty} b_n = L$ also.

Examples: Find the following limits:

1) $\lim \frac{\cos n}{n}$

sol: For each $n \in \mathbb{N}$, $-1 \le \cos n \le 1$, so

$$\frac{-1}{n} \le \frac{\cos n}{n} \le \frac{1}{n}$$

since $\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} = 0 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$, by Sandwich Thrm

$\lim \frac{\cos n}{n} = 0.$

2) $\lim \frac{(-1)^n}{n}$

sol: For each $n \in \mathbb{N}$, $-1 \le (-1)^n \le 1$, so
$$\frac{-1}{n} \le \frac{(-1)^n}{n} \le \frac{1}{n}.$$

As above example since, $\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} = 0 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$, by Sandwich Thrm
$\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0.$

3) Since $2^n > n \ \forall n \Rightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} \ \forall n$,
so we have that $0 < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}.$

since $\lim 0 = 0 = \lim \frac{1}{n} \Longrightarrow$ by Sandwich Thrm, $\lim \frac{1}{2^n} = 0$

4) $\lim \frac{n!}{n^n}$

<u>sol:</u> For each $n \in \mathbb{N}$,

$$n! = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot \cancel{1}}_{} \leq \underbrace{n\cdot n\cdot n\cdot \cdots n}_{n-1 \text{ عددهم}} = n^{n-1}$$

عددهم n / الرقم الأصغر ١ / رقم معنوي لا تأثير له /

الرقم الأول n هو أكبر الأرقام

$$\Longrightarrow 0 < \frac{n!}{n^n} \leq \frac{n^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{n}$$

$$\underset{0}{\downarrow} \qquad \underset{0}{\downarrow} \qquad \underset{0}{\downarrow}$$

by Sandwich Thrm $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$.

THEOREM 3—The Continuous Function Theorem for Sequences Let $\{a_n\}$ be a sequence of real numbers. If $a_n \to L$ and if f is a function that is continuous at L and defined at all a_n, then $f(a_n) \to f(L)$.

Illustrations:

1) $\lim \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \sqrt{\lim \frac{n+1}{n}} = \sqrt{1} = \boxed{1}$

2) $\lim \left(\frac{2n+1}{n-1}\right)^2 = \left(\lim \frac{2n+1}{n-1}\right)^2 = 2^2 = \boxed{4}$

3) $\lim \ln\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right) = \ln\left(\lim \frac{2n+1}{2n-1}\right) = \ln 1 = \boxed{0}$

L'Hôpital's Rule

THEOREM 4 Suppose that $f(x)$ is a function defined for all $x \geq n_0$ and that $\{a_n\}$ is a sequence of real numbers such that $a_n = f(n)$ for $n \geq n_0$. Then

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Examples: Find the following Limits:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n}$

الحل: نلاحظ أن الدالة $\frac{\ln x}{x}$ معرفة لكل $x \geq 1$ ، وهي تتوافق مع المتتابعة المعطاة عند الأعداد الصحيحة (الموجبة) وبالتالي حسب النظرية السابقة

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{L.R.}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \boxed{0}$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{5n} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{L.R}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n \ln 2}{5} = \infty$

ملحوظة: بشكل عام الاشتقاق للمتتابعات بالنسبة للمتغير n غير موجود لأنه في تعريف الاشتقاق نأخذ النهاية عندما $h \to 0$ ، وهذا غير ممكن في المتتابعات (ولكن للتسهيل تم حساب المثال الثاني السابق باستخدام قوانين الاشتقاق بالنسبة لـ n لتوفير تحويلها لـ x على أساس الاعتبار التالي:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{5n} = \lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{5x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{L.R}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2^x \ln 2}{5} = \infty$$

وبهذا فإن اعتبار n هو متغير متصل القيم فإن النتيجة تكون صحيحة وكاملة ،

3) $\lim \sqrt[n]{n} \quad (\infty^0)$

Consider $\lim\limits_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{n} = \lim \dfrac{\ln n}{n} = 0$

so $\lim \sqrt[n]{n} = e^0 = 1.$

So the seq $\{1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[5]{5}, \dots\}$ converges to 1.

4) For each $x > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = \lim x^{\frac{1}{n}} = 1.$

PF: Consider $\lim \ln(x^{\frac{1}{n}}) = \lim \dfrac{\ln x}{n} = 0 \Longrightarrow$

$\lim x^{\frac{1}{n}} = e^0 = 1.$

[For Example: the seq $\{2, \sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2}, \sqrt[5]{2}, \dots\}$

converges to 1]

5) For each $x \in \mathbb{R}$, $\lim \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$

PF: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \quad (1^\infty)$

Consider $\lim \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$

$\overset{L.R.}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(\frac{1}{1+\frac{x}{n}}\right)\cdot x \cdot \cancel{\left(\frac{-1}{n^2}\right)}}{\cancel{\left(\frac{-1}{n^2}\right)}} = x$

so, $\lim \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$

[For Examples: $\left(1-\frac{3}{n}\right)^n \longrightarrow e^{-3}$, and

$\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n = \left(1+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{n}\right)^n \longrightarrow e^{-1/2}$]

Some Basic limits:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} x^{1/n} = 1 \qquad (x>0)$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0 \qquad (|x|<1)$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = e^x \qquad (\text{any } x)$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0 \qquad (\text{any } x)$

In Formulas (3) through (6), x remains fixed as $n \to \infty$.

Examples:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{100^n}{n!} = 0$ (part 6).

2) $\lim \sqrt[n]{2n^2} = \lim\left(\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n^2}\right) = \lim\left(\sqrt[n]{2}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^2\right)$

$= 1 \cdot 1^2 = 1.$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^n \quad (1^\infty)$

Sol: يمكن حل السؤال باستخدام نظرية لوبيتال / ويمكن باستخدام الفقرة (5) من النهايات الأساسية بعد إعادة الترتيب كالتالي :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}\right)^n = \lim \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1-\frac{1}{n})^n} = \frac{e^1}{e^{-1}} = \boxed{e^2}$$

Bounded Monotonic Sequences

DEFINITIONS A sequence $\{a_n\}$ is **bounded from above** if there exists a number M such that $a_n \leq M$ for all n. The number M is an **upper bound** for $\{a_n\}$. If M is an upper bound for $\{a_n\}$ but no number less than M is an upper bound for $\{a_n\}$, then M is the **least upper bound** for $\{a_n\}$. ($\sup_n a_n$)

A sequence $\{a_n\}$ is **bounded from below** if there exists a number m such that $a_n \geq m$ for all n. The number m is a **lower bound** for $\{a_n\}$. If m is a lower bound for $\{a_n\}$ but no number greater than m is a lower bound for $\{a_n\}$, then m is the **greatest lower bound** for $\{a_n\}$. ($\inf_n a_n$)

If $\{a_n\}$ is bounded from above and below, the $\{a_n\}$ is **bounded**. If $\{a_n\}$ is not bounded, then we say that $\{a_n\}$ is an **unbounded** sequence.

Illustrations:

1) The sequence of natural numbers $1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots$ has no upper bound. But it is bounded from below by every real number less than or equal to 1. In fact 1 is the greatest lower bound, so

$$\boxed{\inf_n n = 1}$$

2) The sequence $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$ is bounded above by every real number grater than or equal to 1. Moreover, 1 in the least upper bound of $\{\frac{n}{n+1}\}$, so

$$\sup_n \left\{\frac{n}{n+1}\right\} = 1.$$

On the other hand, every real number less than or equal to $\frac{1}{2}$ is a lower bound, and $\inf_n \left\{\frac{n}{n+1}\right\} = \frac{1}{2}$

Thrm: Any convergent sequence is bounded seq.

ملحوظات: ١ـ النظرية تكافئ النص التالي: "إذا كانت المتتابعة غير محددة من أعلى أو غير محددة من أسفل فإنها ستكون متباعدة".

٢ـ عكس النظرية غير صحيح، فإذا كانت المتتابعة محددة، فإنها ليست بالضرورة تقاربية، ومثال ذلك:

$$\{a_n\} = \{(-1)^{n+1}\} = \{1, -1, 1, -1, \dots\}$$

هي متتابعة محددة، ولكنها غير تقاربية.

DEFINITION A sequence $\{a_n\}$ is **nondecreasing** if $a_n \le a_{n+1}$ for all n. That is, $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \dots$. The sequence is **nonincreasing** if $a_n \ge a_{n+1}$ for all n. The sequence $\{a_n\}$ is **monotonic** if it is either nondecreasing or nonincreasing.

Illustrations:

1) The sequence of natural numbers $\{1, 2, 3, \dots\}$ is nondecreasing.
2) The seq $\{a_n\} = \{\frac{1}{n}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ is nonincreasing.
3) The seq $\{1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \dots\}$ is nondecreasing seq.
4) The constant seq $\{2\} = \{2, 2, 2, \dots\}$ is both nondecreasing and nonincreasing seq.

Moreover, all of the four seqs are monotonic

5) The seq $\{\frac{(-1)^n}{n}\} = \{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ is not monotonic.

THEOREM 6—The Monotonic Sequence Theorem If a sequence $\{a_n\}$ is both bounded and monotonic, then the sequence converges.

ملحوظات: ١ـ عكس النظرية غير صحيح، فإذا كانت المتتابعة تقاربية، فليس بالضرورة أن تكون monotonic، ومثال ذلك المتتابعة $\{\frac{(-1)^n}{n}\}$ تقاربية، ولكن ليست monotonic.

٢ـ في حال كانت المتتابعة غير متناقصة فإنها بالتأكيد محددة من أسفل بالحد الأول، ولذلك لإثبات أنها محددة يكفي إثبات أنها محددة من أعلى فقط، وبالمثل إذا كانت غير متزايدة.

Example: show that the seq $\{a_n\} = \left\{\frac{3n+1}{n+1}\right\}$ is bounded and monotonic, then find its limit.

sol: $a_n' = \frac{(n+1)\cdot 3 - (3n+1)\cdot 1}{(n+1)^2} = \frac{2}{(n+1)^2} > 0 \quad \forall n$

so a_n is $\nearrow$. So it is bded below by $a_1 = 2$.

Moreover $\frac{3n+1}{n+1} = \frac{3n+3-2}{n+1} = 3 - \frac{2}{n+1} < 3 \quad \forall n$

so it is bded above by 3. Therefore the seq is bounded and monotonic so it is convergent seq.

$$\lim \frac{3n+1}{n+1} = 3.$$

ملحق

Evaluate the limits:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{4n}\right)^{3n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{(-1/4)}{n}\right)^{n}\right]^{3}$

$= \left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1/4)}{n}\right)^{n}\right]^{3} = \left(e^{-1/4}\right)^{3} = e^{-3/4}.$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{3n+1}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3n}\right)$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right) n.\sin\left(\pi/3n\right)$

Consider $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3n+1} = \frac{1}{3}$, and

$\lim\limits_{n\to\infty} n.\sin\left(\frac{\pi}{3n}\right)\ (\infty.0) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin \pi/3n}{\left(\frac{1}{n}\right)}\ \left(\frac{0}{0}\right)$

$\overset{L.R.}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{\pi}{3n} * \pi/3 * \cancel{\left(\frac{-1}{n^2}\right)}}{\cancel{\left(\frac{-1}{n^2}\right)}} = \pi/3.$

So $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{3n+1}\right)\sin\left(\pi/3n\right) = 1/3 * \pi/3 = \boxed{\pi/9}$

3) Show that the seq $\{a_n\} = \left\{\frac{(2n+3)!}{(n+1)!}\right\}$

is monotonic. Is it bded??

sol: من هذا المثال لا يصح استخدام فكرة الإشتقاق لإثبات monotonic.

Consider $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2(n+1)+3)!}{((n+1)+1)!}\cdot\frac{(n+1)!}{(2n+3)!} = \frac{(2n+5)!\ (n+1)!}{(n+2)!\ (2n+3)!}$

$= \frac{(2n+5)\overset{2}{\cancel{(2n+4)}}\cancel{(2n+3)!}\ \cancel{(n+1)!}}{\cancel{(n+2)}\cancel{(n+1)!}\ \cancel{(2n+3)!}} = 2(2n+5) = 4n+10 > 1$

$\therefore a_{n+1} > a_n$ and hence the seq is nondecreasing.

لمعرفة ما إذا كانت المتتابعة محدودة أم لا ، لاحظ بداية أنها غير متناقصة وعليه فإنها بالتأكيد محدودة من أسفل وما يتبقى علينا فحصه هو كونها محدودة من أعلى .

أثبتنا من الجزء الأول أن $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 4n+10$ لذا لاحظ ما يلي

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 4n+10 > 10 \Longrightarrow a_{n+1} > 10\, a_n$$

بتطبيق هذه العلاقة استقرائياً نحصل على

$\forall n$

$$a_{n+1} > 10\, a_n > 10^2 a_{n-1} > 10^3 a_{n-2} > \cdots > 10^n a_1$$

لكن $a_1 = \frac{5!}{2!} = 60$ وبالتالي

$$\forall n, \quad a_{n+1} > 60 * 10^n \longrightarrow \infty$$

وبالتالي واضح أن المتتابعة غير محدودة من أعلى ، لذا فهي غير محدودة ومن ثم غير تقاربية .