10.3 The Integral Test

Note Title ٢٣/٠٥/١٣

إذا كان لدينا متسلسلة $\sum a_n$ ذات حدود موجبة $a_n \geq 0$ لكل n فإن متتابعة المجاميع الجزئية تكون غير متناقصة لأنها تحقق العلاقة -

$$S_{n+1} = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + a_{n+1} = S_n + a_{n+1} > S_n$$

وبالتالي

$$S_1 < S_2 < S_3 < \dots < S_n < \dots$$

وحسب النظريات / تكون تقاربية إذا وفقط إذا كانت محدودة من أعلى ، وهذا يبرهن النتيجة التالية :

Corollary of Theorem 6 A series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ of nonnegative terms converges if and only if its partial sums are bounded from above.

Example: The harmonic series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

is divergent series

PF: Group the terms of the series as follows:

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{> \frac{2}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{> \frac{4}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16}\right)}_{> \frac{8}{16} = \frac{1}{2}} + \dots$$

واضح أن هذا التجميع لحدود متتابعة المجاميع الجزئية يجعل المتتابعة غير محدودة من أعلى / وبالتالي ستكون تباعدية .

Test for Convergence

كما سبق نلاحظ أنه لأي متسلسلة / توجد متتابعة المجاميع الجزئية المرتبطة بها / ولكي نحدد ما إذا كانت المتسلسلة تباعدية أم تقاربية لابد ما يجب إيجاد قانون عام لمتتابعة المجاميع الجزئية أو إيجاد طريقة للتعامل معها لأخذ النهاية ، ولكن إذا لم نستطع التعامل مع هذه النهاية / فإنه من المفيد معرفة ما إذا كانت المتسلسلة تقاربية أم تباعدية / فإذا كانت تباعدية فإن هذه تكون نهاية المطاف / أما إذا كانت تقاربية / فإنه يمكن التعامل معه وإيجاد تقريبات له .

سنستخدم بعض الإختبارات لبعض التقارب والتباعد .

THEOREM 9—The Integral Test Let $\{a_n\}$ be a sequence of positive terms. Suppose that $a_n = f(n)$, where f is a continuous, positive, decreasing function of x for all $x \geq N$ (N a positive integer). Then the series $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ and the integral $\int_N^{\infty} f(x)\,dx$ both converge or both diverge.

الإختبار الثالث هو اختبار التكامل / ونستخدم عادة عندما تكون الدالة $f(x)$ سهلة التكامل.

Examples: Test the convergence of the following series:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$

Sol: Let $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ for $x \geq 1$. So

a) $f(x)$ is continuous on $[1,\infty)$

b) Clearly $f(x)$ is positive on $[1,\infty)$.

c) $$f'(x) = \frac{x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2} - e^{\frac{1}{x}} \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{-e^{\frac{1}{x}}}{x^2}(1+2x) < 0$$ on $[1,\infty) \Rightarrow f(x)$ is $\searrow$ on $[1,\infty)$

Consider $$\int_1^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$$

$u = \frac{1}{x}$

$du = \frac{-1}{x^2}\,dx$

$x=1 \rightarrow u=1$

$x=b \rightarrow u=\frac{1}{b}$

$$= \lim_{b\to\infty} -\int_1^{\frac{1}{b}} e^u\,du$$

$$= \lim_{b\to\infty} -e^u\Big]_1^{\frac{1}{b}} = \lim_{b\to\infty}\left[e - e^{\frac{1}{b}}\right] = e-1$$

so $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$ is convergent.

$\Rightarrow$ By integral test, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$ is convergent.

ملحوظات: ١- في المثال السابق / تقارب المتسلسلة لا يساوي بالضرورة قيمة تقارب التكامل المعتل $(e-1)$.

٢- الشروط الثلاثة ! إذا لم تتحقق على $[1,\infty)$ وتحققت على $[N,\infty)$ يبقى الحل صحيحاً لأنه إضافة أو إزالة عدد محدود من حدود المتسلسلة لا يؤثر على كونها تقاربية أم تباعدية.

2) (The p-series) تستخدم لنظرية

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad , \quad p \text{ is a real constant}$$

sol: Let $f(x) = \frac{1}{x^p}$, $x \in [1, \infty)$

a) $f(x)$ is cont. on $[1,\infty)$, (b) f is positive on $[1,\infty)$

c) $f'(x) = \frac{-p}{x^{1+p}} < 0 \quad \forall\, x \geq 1$, so f is $\searrow$ on $[1,\infty)$

Consider $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ is $\begin{cases} \text{conv.} & \text{if } p > 1 \\ \text{div.} & \text{if } p \leq 1 \end{cases}$

(improper p-integral)

so By integral test, we get that the p-series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ is } \begin{cases} \text{conv.} & \text{if } p > 1, \\ \text{div.} & \text{if } p \leq 1. \end{cases}$$

Illustrations:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverges (p-series, $p = \frac{1}{2} < 1$)

(ii) The harmonic series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverges (p-series, $p=1$)

(iii) $\displaystyle\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converges (p-series, $p = 2 > 1$)

لاحظ أنه اختبار الحد النوني في المثاليه السابقيه يفشل لأنه
في كل المثاليه $a_n \to 0$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

sol: $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e^1 \neq 0$, so the series div. by nth-term test.

4) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\, 2^{-n^3}$

sol: Clearly the series is not geometric, not telescop., and $a_n \xrightarrow{L.R} 0$ so nth-term test fails.

Let $f(x) = x^2\, 2^{-x^3}$, $x \geq 1$.

a) $f(x)$ is cont. on $[1, \infty)$

b) $f(x)$ is positive on $[1, \infty)$

c) $f'(x) = x^2 \cdot 2^{-x^3} \cdot \ln 2 \cdot -3x^2 + 2x\, 2^{-x^3}$

$$= x\, 2^{-x^3}\left[2 - (3\ln 2)x^3\right] < 0 \qquad \forall x \geq 1$$

so f is $\searrow$ on $[1, \infty)$.

Consider
$$\int_1^{\infty} x^2\, 2^{-x^3}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^2\, 2^{-x^3}\, dx \qquad u = -x^3$$
$$du = -3x^2 dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_{-1}^{-b^3} -\tfrac{1}{3}\, 2^u\, du \qquad x = 1 \longrightarrow u = -1$$
$$x = b \longrightarrow u = -b^3$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-\tfrac{1}{3}\,\frac{1}{\ln 2}\, 2^u\right]_{-1}^{-b^3}$$

$$= \frac{-1}{3\ln 2} \lim_{b\to\infty}\left[2^{-b^3} - 2^{-1}\right] = \frac{1}{6\ln 2}$$

which is convergent, so by integral test,

$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\, 2^{-n^3}$ converges.

ملحوظ

Examples: Discuss the convergence of the following:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{e^{n}+e^{-n}}$

<u>Sol:</u> Let $f(x) = \dfrac{2}{e^{x}+e^{-x}} = \dfrac{2e^{x}}{e^{2x}+1}$, $x \geq 1$

a) $f(x)$ is cont. on $[1,\infty)$,

b) $f(x)$ is positive on $[1,\infty)$, and

c) $f'(x) = \dfrac{(e^{2x}+1)\cdot 2e^{x} - 2e^{x}\cdot 2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = \dfrac{-2e^{3x}+2e^{x}}{(e^{2x}+1)^2}$

$$= \frac{-2e^{x}(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2} < 0 \qquad \forall\ x \geq 1$$

so $f(x)$ is $\searrow$ <u>fun</u> on $[1,\infty)$.

Consider $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{2e^{x}}{e^{2x}+1}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{2e^{x}}{e^{2x}+1}\,dx$

$u = e^{x}$

$du = e^{x}\,dx$

$x = 1 \longrightarrow u = e$

$x = b \longrightarrow u = e^{b}$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_e^{e^b} \frac{2\,du}{u^2+1}$$

$$= \lim_{b\to\infty} 2\tan^{-1}u \Big]_e^{e^b}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(2\tan^{-1}e^{b} - 2\tan^{-1}e\right) = \pi - 2\tan^{-1}e$$

which is conv. So by integral test, the series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{e^{n}+e^{-n}}$ is convergent series.

ملحوظة: نلاحظ أن المسألة $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{e^{n}+e^{-n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sech}(n)$

وبالتالي كان يمكن ايجاد التكامل لـ sech(n) مباشرة والوصول لنفس النتيجة.

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5^n}+\frac{1}{5n}\right)$

Sol: The original series is the sum of the two series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$ and $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n$ is G.S. with $r=\frac{1}{5}$ so it is conv.

and $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n}=\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ which is a constant multiple of the divergent harmonic series, so by Corollary it is div.

Thus, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5^n}+\frac{1}{5n}\right)$ is the sum of convergent and divergent series, so it is $\boxed{\text{divergent}}$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5^n}+\frac{e^{\tan^{-1}n}}{n^2+1}\right)$

Consider $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$ is G.S. with $r=\frac{1}{5}$ so it is conv.

For the series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\tan^{-1}n}}{n^2+1}$

Let $f(x)=\dfrac{e^{\tan^{-1}x}}{x^2+1}$ on $[1,\infty)$.

1) $f(x)$ is cont. on $[1,\infty)$
2) Clearly $e^{\tan^{-1}x}>0$ $\forall x\geq 1$ so $f(x)$ is positive for all $x\geq 1$

3) $f'(x) = \dfrac{(x^2+1) * e^{\tan^{-1} x} \cdot \frac{1}{x^2+1} - 2x\, e^{\tan^{-1} x}}{(x^2+1)^2} = \dfrac{e^{\tan^{-1} x}}{(x^2+1)^2}(1-2x) < 0$

$\forall x \geq 1 \Longrightarrow f(x)$ is $\searrow$ fun.

Consider $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{\tan^{-1} x}}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{e^{\tan^{-1} x}}{1+x^2}\, dx$

$u = \tan^{-1} x$

$du = \dfrac{1}{1+x^2}\, dx$

$\displaystyle = \lim_{b\to\infty} \int_{\pi/4}^{\tan^{-1} b} e^u du$

$x = 1 \longrightarrow u = \pi/4$

$x = b \longrightarrow u = \tan^{-1} b$

$\displaystyle = \lim_{b\to\infty} e^u \Big]_{\pi/4}^{\tan^{-1} b} = \lim_{b\to\infty} \left(e^{\tan^{-1} b} - e^{\pi/4}\right) = e^{\pi/2} - e^{\pi/4}.$

which is convergent. So by integral test, the series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\tan^{-1} n}}{n^2+1}$ converges. Hence, the original series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5^n} + \frac{e^{\tan^{-1} n}}{n^2+1}\right) \boxed{\text{Converges}}$$