10.4 Comparison Tests (اختبارات المقارنة)

في هذا الفصل نقوم بمقارنة متسلسلة $\sum a_n$ لم نستطع تحديد ما إذا كانت تقاربية أم لا مع متسلسلات أخرى التعامل معها أسهل، كأن تكون geometric series أو p-series أو غيرها مما يمكن التعامل معها / وهذه المقارنة تتم بطريقة تشبه إلى حد بعيد ما تم في اختبارات المقارنة للتكاملات المعتلة في sec 8.7 .

THEOREM 10—The Comparison Test Let $\sum a_n$, $\sum c_n$, and $\sum d_n$ be series with nonnegative terms. Suppose that for some integer N

$$d_n \le a_n \le c_n \qquad \text{for all} \qquad n > N.$$

(a) If $\sum c_n$ converges, then $\sum a_n$ also converges.

(b) If $\sum d_n$ diverges, then $\sum a_n$ also diverges.

Examples: Discuss the convergence of the following series:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2+1}$

<u>sol:</u> نلاحظ في البداية أن المتسلسلة ليست هندسية ولا تلسكوبية / ليست p-series

كما أن اختبار الحد النوني يفشل لأنه يمكن اثبات أن $a_n \to 0$ باستخدام Sandwich Thrm .

باستخدام الاختبارات / لا نستخدم اختبار التكامل لأن تكامل الدالة $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2+1}$ صعبا .

باستخدام اختبار المقارنة المباشر مع متسلسلة تقاربية (لماذا؟!)

$$\frac{\sin^2 n}{n^2+1} < ??$$

$$0 \le \sin^2 n \le 1 \qquad \text{and} \qquad n^2+1 > n^2 \implies \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$$

$$\implies \qquad 0 \le \frac{\sin^2 n}{n^2+1} \le \frac{1}{n^2}$$

since $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ is convergent (p-series, $p=2>1$)

so by DCT, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2+1}$ is convergent. $\square$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n+3}$

sol:
$$\frac{\sqrt{n}+1}{n+3} > ??$$

$$\sqrt{n}+1 > \sqrt{n} \quad \text{and} \quad n+3 < n+n \quad \forall n > 3$$

so $\displaystyle \frac{\sqrt{n}+1}{n+3} > \frac{\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \quad \forall\ n > 3$

Since $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ diverges (p-series , $p = \frac{1}{2}$), then

by DCT, $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n+3}$ also diverges. Hence we get

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n+3} \text{ diverges}$$

(إضافة أو إزالة عدد محدود من حدود المتتابعة لا يؤثر على كونها تقاربية أو تباعدية)

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$

sol: تم حل هذا المثال سابقاً باستخدام إختبار التكامل / وهنا سنقوم بحله باستخدام اختبار المقارنة.

$$\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2} < ??$$

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{n} \leq 1 \implies e^{\frac{1}{n}} \leq e \quad$ (e^x is $\nearrow$ fun)

$$\implies \quad 0 < \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2} < \frac{e}{n^2}$$

since $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e}{n^2}$ converges (p-series, $p = 2 > 1$) , then

by DCT $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$ converges.

4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}$

Sol: Note that for $n \geq 2$,

$$n! = \underbrace{n(n-1)\cdots 3\cdot 2}_{\text{عددهم } n-1} \geq 2\cdot 2\cdot 2 \cdots 2 = 2^{n-1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \forall\, n \geq 2$$

Since $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ Converges (G.S. with $r = \frac{1}{2}$)

then by DCT, $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}$ converges and hence

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad \text{Converges.}$$

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2n^2-1}\right)$

Sol: Since $a_n = \cos\left(\frac{\pi}{2n^2-1}\right) \longrightarrow \cos 0 = 1 \neq 0$, then by nth-term test, the series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2n^2-1}\right)$ diverges.

6) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 + n\ln n}{n^2+5}$

Sol: $$\frac{1 + n\ln n}{n^2+5} > ??$$

$$1 + n\ln n > n\ln n > n \qquad \forall\, n \geq 3$$

and $$n^2 + 5 < n^2 + n^2 = 2n^2 \qquad \forall\, n \geq 3$$

$$\therefore \quad \frac{1 + n\ln n}{n^2+5} > \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n} \qquad \forall\, n \geq 3$$

since $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2n}$ diverges (p-series, $p=1$),

then by DCT, $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1 + n\ln n}{n^2+5}$ diverges and hence

$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 + n\ln n}{n^2+5}$ diverges.

THEOREM 11—Limit Comparison Test Suppose that $a_n > 0$ and $b_n > 0$ for all $n \geq N$ (N an integer).

1. If $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$, then $\sum a_n$ and $\sum b_n$ both converge or both diverge.

2. If $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ and $\sum b_n$ converges, then $\sum a_n$ converges.

3. If $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ and $\sum b_n$ diverges, then $\sum a_n$ diverges.

Examples: Discuss the convergence of the following series:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n+3}$

sol: تم حل هذا السؤال بإستخدام اختبار DCT . هنا سنحاول استخدام اختبار LCT .

Take $a_n = \frac{\sqrt{n}+1}{n+3}$ and $b_n = \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Note that

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ diverges } (p\text{-series}, \ p = \tfrac{1}{2} < 1)$$

Consider $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{n}+1}{n+3}\right) / \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{n+3} = 1$$

So by LCT, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n+3}$ is divergent.

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2\sqrt{n+2}}$

sol: Take $a_n = \frac{2n+1}{n^2\sqrt{n+2}}$ and $b_n = \frac{n}{n^2\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}$.

$\sum b_n = \sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converges.

Consider $\displaystyle\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{n^2\sqrt{n+2}}\right) \cdot n^{3/2} = \frac{2}{\sqrt{1}}$

So by LCT, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2\sqrt{n+2}}$ converges.

3) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+n\ln n}{n^2+5}$

Sol: قمنا بحل هذا المثال سابقاً باستخدام DCT ، وهنا سنحاول استخدام LCT .

Take $a_n = \dfrac{1+n\ln n}{n^2+5}$, $b_n = \dfrac{1}{n}$. $\sum b_n = \sum \frac{1}{n}$ div.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+n^2\ln n}{n^2+5} \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$\overset{L.R.}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1+n^2\cdot\frac{1}{n}+2n\ln n}{2n} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{L.R.}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1+2n\cdot\frac{1}{n}+2\ln n}{2} = \infty$$

So by LCT, $\sum \dfrac{1+n\ln n}{n^2+5}$ diverges.

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{3/2}}$

Sol: حل 1 تذكر أننا أثبتنا سابقاً أن الدالة $\ln x$ تنمو أبطأ من الدالة x^r لأي $r>0$ وبالتالي يمكننا استنتاج أن الدالة $\ln x < x^r$ عندما تكون x كبيرة بشكل كافٍ وبالتالي يمكننا استخدام العلاقة $\ln n < n^r$ لأي $r>0$ عندما n تكون كبيرة بشكل كاف.

Now $\ln n < n^{1/4} \Rightarrow \dfrac{\ln n}{n^{3/2}} < \dfrac{n^{1/4}}{n^{3/2}} = \dfrac{1}{n^{5/4}}$

Since $\sum \frac{1}{n^{5/4}}$ conv. (p-series , $p = 5/4 > 1$) , then

by DCT, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{3/2}}$ converges.

ملاحظة : تم اختيار $\ln n < n^{1/4}$ حتى تكون $\dfrac{\ln n}{n^{3/2}} < \dfrac{1}{n^{5/4}}$ وبالتالي ينجح الاختبار ، لذلك لاحظ أن أي اختيار آخر لـ r أقل من $\frac{1}{4}$ هو اختيار صحيح أيضاً .

حل 2 Take $a_n = \dfrac{\ln n}{n^{3/2}}$ and $b_n = \dfrac{1}{n^{5/4}}$

(نختار $b_n = \frac{1}{n^{5/4}}$ أو $\frac{1}{n^a}$ لأي $1 < a < \frac{5}{4}$ ، انظر (الملاحظة السابقة) .

$$\sum b_n = \sum \frac{1}{n^{5/4}} \quad \text{conv.} \quad (p\text{-series}, \ p = 5/4 > 1)$$

$$\text{Consider } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln n}{n^{3/2}}\right) \cdot n^{5/4} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{1/4}} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{L.R.}{=} 0.$$

$$\Longrightarrow \text{By LCT, } \sum \frac{\ln n}{n^{3/2}} \text{ converges.}$$

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$

الحل: تم حل السؤال سابقاً مرتين / باستخدام اختبار التكامل وباستخدام DCT /

Now using LCT, take $a_n = \dfrac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$ and $b_n = \dfrac{1}{n^2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{converges} \quad (p\text{-series}, \ p = 2 > 1)$$

$$\text{Consider } \lim \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}\right) \cdot n^2 = 1$$

$$\text{so, by LCT, } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2} \quad \text{converges.}$$

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$

الحل: لاحظ انه يمكنك حل السؤال بسهولة باستخدام DCT (حاول حله)

Take $a_n = \dfrac{1}{2^n - 1}$, $b_n = \dfrac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$$\sum b_n = \sum \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \quad \text{converges} \quad \text{G.S. with } r = \tfrac{1}{2}$$

and $|r| = \frac{1}{2} < 1$.

$$\text{Consider } \lim \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - 1} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{L.R.}{=} 1$$

$$\text{so by LCT, } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1} \quad \text{converges.}$$

ملحوظ

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + \sqrt{n}}$

Sol: $\frac{1}{2^n + \sqrt{n}} < ??$

$2^n + \sqrt{n} > 2^n \quad \forall n, \quad$ so $\frac{1}{2^n + \sqrt{n}} < \frac{1}{2^n}$

Since $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converges, then by DCT,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + \sqrt{n}}$ Conv.

حاول حل السؤال باستخدام LCT بمقارنتها ب $b_n = \frac{1}{2^n}$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\cos(2n-1) + n^2}$

Sol: $\frac{\sqrt{n}}{\cos(2n-1) + n^2} < ??$

$\cos(2n-1) > -1$

$\therefore \quad \cos(2n-1) + n^2 > n^2 - 1 > n^2 - \frac{n^2}{2} = \frac{n^2}{2} \qquad \forall n \geq 2$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{\cos(2n-1) + n^2} < \frac{2\sqrt{n}}{n^2} = \frac{2}{n^{3/2}}$

Since $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^{3/2}}$ converges, $\left(p\text{-series}, \ p = \frac{3}{2} > 1\right)$

then by DCT, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\cos(2n-1) + n^2}$ converges.

لاحظ أنه علاقة $a_n < b_n$ تتحقق لكل $n \geq 2$ ورغم ذلك قلنا أنه المتسلسلة
ابتداءً من $n = 1$ تقاربية وذلك لأنه إضافة عدد محدود من حدود المتتابعة
لا يؤثر على كونها تقاربية أم لا .

3) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

sol: إذا حاولنا حل السؤال باستخدام اختبارات المقارنة سنجد صعوبة كبيرة ولن نستطيع حله بالسهولة التي حللت بها أمثلة سابقة احتوت على $\ln n$ ، فإذا قمنا بمقارنتها بمتسلسلة تقاربية ، تكون النهاية ∞ ويفشل الاختبار ، وعلى العكس إذا أخذنا مقارنة تباعدية تكون النهاية 0 ويفشل الاختبار أيضاً . (حاول وجرب) .

Using integral test, Let $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$, $x \geq 2$

clearly, 1) f is cont. on $[2, \infty)$

2) f is positive $\forall x \geq 2$.

3) $f' = \dfrac{-(1+\ln x)}{(x \ln x)^2} < 0 \quad \forall x \geq 2$

Consider $$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \to \infty} \int_2^b \frac{dx}{x \ln x}$$

$u = \ln x$

$du = \dfrac{dx}{x}$

$x = 2 \to u = \ln 2$

$x = b \to u = \ln b$

$$= \lim_{b \to \infty} \int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{du}{u}$$

$$= \lim_{b \to \infty} \ln|u| \Big]_{\ln 2}^{\ln b} = \lim_{b \to \infty} [\ln(\ln b) - \ln(\ln 2)] = \infty$$

so $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ diverges.

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2n^2-1}\right)$

sol: Note that $a_n \to 0$.

Using LCT, take $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2n^2-1}\right)$, $b_n = \frac{1}{n^2}$.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converges (p-series , $p = 2 > 1$).

Consider $$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2n^2-1}\right)}{\left(\frac{1}{n^2}\right)} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{L.R}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n^2-1}\right) * \pi * \frac{-4n}{(2n^2-1)^2}}{\left(-2/n^3\right)} = \pi/2$$

so by LCT, $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2n^2-1}\right)$ converges.

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2n-1}\right)$

Sol: يحل هذا المثال بطريقة مشابهة لما تم في (٤) ولكن بمقارنة

بـ $b_n = \frac{1}{n}$ وبالتالي سيكون متباعداً.

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n + n}$

Sol: لأنه 3^n أسرع في النمو من n ومن n^2 فإنه التأثير الأكبر عندما تكبر n سيكون لـ 3^n وعليه فإننا نتوقع لهذه المتسلسلة أنه تكون تقاربية.

$$\frac{n^2}{3^n + n} < ??$$

أيضاً 2^n أسرع في النمو من n^2 لذلك $n^2 < 2^n$

and

$$3^n + n > 3^n \Longrightarrow \frac{n^2}{3^n + n} < \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Now, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ converges (G.S. with $r = 2/3$)

then by DCT, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n + n}$ converges.