10.5 The ratio and Root tests

Note Title ٢٣/٠٥/٢١

THEOREM 12—The Ratio Test Let $\sum a_n$ be a series with positive terms and suppose that

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho .$$

Then **(a)** the series *converges* if $\rho < 1$, **(b)** the series *diverges* if $\rho > 1$ or ρ is infinite, **(c)** the test is *inconclusive* if $\rho = 1$.

ملحوظة: عندما يعتمد الحد النوني للمتسلسلة على $n!$ ومضروب n فإنه يفضل إستخدام إختبار النسبة بشرط $\rho \neq 1$.

THEOREM 13—The Root Test Let $\sum a_n$ be a series with $a_n \geq 0$ for $n \geq N$, and suppose that

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho .$$

Then **(a)** the series *converges* if $\rho < 1$, **(b)** the series *diverges* if $\rho > 1$ or ρ is infinite, **(c)** the test is *inconclusive* if $\rho = 1$.

يفضل إستخدام هذا الإختبار عندما يكون هناك سهولة في حساب نهاية الجذر النوني للحد a_n ولا تكون النتيجة 1.

ملحوظة: عندما تكون $\rho = 1$ في اختباري النسبة و الجذر النوني، فإن المتسلسلة قد تكون تقاربية وقد تكون تباعدية / ولتوضيح ذلك / إدرس المثال التالي:

Illustration: Ratio test:

For the series $\sum \frac{1}{n}$, $\rho = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{n}{n+1} = 1$, and the series diverges.

For the series $\sum \frac{1}{n^2}$, $\rho = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$ and the series converges.

Similarly for Root test:

For the series $\sum \frac{1}{n}$, $\rho = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$, and

for the series $\sum \frac{1}{n^2}$, $\rho = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 1$. $\square$.

Examples: Determine if the following series converges or diverges.

1) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+5}{3^n}$$

Sol: لاحظ بداية أنه يمكن حل السؤال بسهولة على أساس أنها مجموع متسلسلتين هندسيتين متقاربتين، ويمكن أيضاً الحل باستخدام إختبار المقارنة. باستخدام اختبار النسبة:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^{n+1}+5}{3^{n+1}}\right) \cdot \frac{3^n}{2^n+5}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2\cdot 2^n+5)}{3\cdot 3^n} \cdot \frac{3^n}{2^n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \frac{2\cdot 2^n+5}{2^n+5} = \frac{2}{3}$$

Since $\rho < 1$, so by ratio test the series $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+5}{3^n}$ converges.

2) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\, n!}$$

Sol: $$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2(n+1))!}{(n+1)!\,(n+1)!} \cdot \frac{n!\, n!}{(2n)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}\,\cancel{n!}\,\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{(n!)}(n+1)\cancel{(n!)}\,\cancel{(2n)!}} = 4 > 1$$

so by ratio test, the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\, n!}$ diverges.

3) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)^n}$$

Sol: Consider $\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$

so by root test, the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)^n}$ converges.

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

Sol: حل 1 By ratio test:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \text{ converges.}$$

حل 2 By root test:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

so $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ converges.

ملحوظة: عندما يكون بالإمكان حل السؤال باستخدام إختباري النسبة و الجذر النوني ، فإن قيمة ρ في كلا الإختبارين ستكون متساوية ، وبالتالي القرار سيكون نفسه ، ولكن هناك بعض المتسلسلات يمكن حلها بأحد الإختبارين فقط كالمثال التالي :

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ where $a_n = \begin{cases} n/2^n, & n \text{ odd} \\ \frac{1}{2^n}, & n \text{ even.} \end{cases}$

Sol: لاحظ أن المتتابعة $\{a_n\}$ هي $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{3}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \frac{5}{2^5}, \dots\right\}$ وبالتالي المتسلسلة هي

$$\sum a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \cdots$$

لاحظ أنه يمكن حل المثال باستخدام LCT مع $\sum b_n = \sum (\frac{1}{4})^n$ و باستخدام Sandwich Thm (حاول ذلك)

سنوضح في هذا المثال أن اختبار النسبة يفشل ولكن إختبار الجذر النوني ينجح .

Note that $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{2n}, & n \text{ odd} \\ \frac{n+1}{2}, & n \text{ even} \end{cases}$

so As $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ diverges

But $\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[n]{n}/2, & n \text{ odd} \\ \frac{1}{2}, & n \text{ even} \end{cases}$

so $\lim \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \sum a_n$ converges.

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$

sol:

حل 1

$a_n \longrightarrow \infty \neq 0 \Rightarrow$ by nth-term test, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ diverges

(عكس نظرية مثال (4))

حل 2 By ratio test, $\rho = \lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 2$

since $\rho > 1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ div.

حل 3 By root test, $\rho = \lim \sqrt[n]{a_n} = 2 > 1 \Rightarrow$ diverges.

7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$

sol: $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{3n+1} = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow$ by root test, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$ converges.

8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n$

sol: Note that $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim \dfrac{3n}{3n+1} = 1$

so root test gives no information about the series.

But

$$a_n = \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n = \left(\frac{1}{1 + \frac{(1/3)}{n}}\right)^n \longrightarrow \frac{1}{e^{1/3}} \neq 0$$

so by nth-term test, the series diverges.

9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n\, n!\, n!}{(2n)!}$

sol: $\rho = \lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4^{n+1}\,(n+1)!\,(n+1)!}{(2n+2)!} \cdot \dfrac{(2n!)}{4^n\, n!\, n!}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+2}{2n+1} = 1$

so ratio test gives no information about this series.

Note that
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+2}{2n+1} > 1 \quad \text{so}$$

$\forall n,\quad a_n < a_{n+1} \Rightarrow a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$

but $a_1 = 2 \Rightarrow \forall n,\ a_n > 2$. Hence $a_n \not\to 0$ and so, by nth-term test, $\sum \frac{4^n\, n!\, n!}{(2n)!}$ diverges.

10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{4^n}$

حل 1

sol: By ratio test, $\rho = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(n+1)!\ 4^n}{n!\ 4^{n+1}}$

$= \infty > 1 \Rightarrow$ the series diverges.

حل 2

$\lim a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{4^n} = \infty \neq 0$, so by nth-term test, the series diverges.

Determine whether the following series converges or diverges.

1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log_n (n!)}{n^3}$

sol: في هذا المثال / ولوجود $n!$ / نقوم باستخدام اختبار النسبة / لكن
سنجد أن حساب النهاية $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ لن تكون سهلة / ولا يصح معها استخدام
نظرية لوبيتال / ولذلك سنقوم باستخدام اختبارات المقارنة / (لماذا؟)

قمنا سابقاً بإثبات أن $n! < n^n$ ، ولأن اللوغاريتمات عندما $n>1$ هي
دوال متزايدة / فإنه لذلك $n \in \mathbb{N}$ /

$$\log_n n! < \log_n n^n = n \log_n n = n \cdot \frac{\ln n}{\ln n} = n$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{\log_n n!}{n^3} < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$$

since $\sum \frac{1}{n^2}$ converges, then by DCT, the series $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log_n n!}{n^3}$ converges.

2) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}$$

sol: Consider $$\rho = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{(n+1)}{\cancel{(n+1)!}}}{\cancel{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}\,(2n+1)} \cdot \frac{\cancel{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}}{\cancel{n!}}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1,$$

so by ratio test, the series converges.

3) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3 \, 5^{n+2}}$$

sol: بداية يمكنك حل السؤال باختبارات المقارنة وأيضاً باختبار النسبة
سنقوم هنا بحله باختبار الجذر النوني

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{3^n}}{\sqrt[n]{n^3}\,\sqrt[n]{5^2} \cdot \sqrt[n]{5^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{(\sqrt[n]{n})^3 \sqrt[n]{25} \cdot 5} = \frac{3}{1^3 \cdot 1 \cdot 5} = \frac{3}{5} < 1$$

so by root test, the series converges.