10.7 Power Series

Note Title ٢٣/٠٥/٢٦

مقدمة: متسلسلات القوى هي متسلسلات لا نهائية تحتوي على متغير x
ولها صورة تشبه الحدوديات ، وهي متسلسلات قد تكون تقاربية عند بعض
قيم لـ x وفي نفس اللحظة تكون تباعدية عند قيم أخرى لـ x ، ويتم التعامل
مع متسلسلات القوى على أنها دوال عند قيم x التي تكون متقاربة عندها ا
وبالتالي يمكن جمعها وطرحها وضربها كما يمكن اجراء اشتقاقات وتكاملات لها .

DEFINITIONS A **power series about $x = 0$** is a series of the form

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots. \qquad (1)$$

A **power series about $x = a$** is a series of the form

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots \qquad (2)$$

in which the **center** a and the **coefficients** $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ are constants.

لاحظ أن متسلسلة القوى حول $x=0$ هي حالة خاصة من
متسلسلة القوى حول $x=a$ حيث $a=0$.

Illustration:

1) The series $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ is a power series with center $a=0$ and coefficients $C_n = 1$.
Clearly this series is geometric with first term $a_1 = 1$ and ratio $r = x$, so it converges when $|x| < 1$ to $\frac{1}{1-x}$. Hence we can write

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad -1 < x < 1.$$

2) The series $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n (x-2)^n = 1 - \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{4}(x-2)^2 - \cdots$ is a power series about $a=2$ with coefficients $c_n = \left(\frac{-1}{2}\right)^n$.
It is G.S. with $a_1 = 1$ and $r = \frac{-(x-2)}{2}$, so

it converges when $\left|\frac{-(x-2)}{2}\right| < 1 \Rightarrow -2 < x-2 < 2$ or $0 < x < 4$, and the sum is $\dfrac{1}{1-\left(\frac{2-x}{2}\right)} = \dfrac{2}{x}$

Therefore, $\forall\ x \in (0,4)$,

$$\frac{2}{x} = 1 - \tfrac{1}{2}(x-2) + \tfrac{1}{4}(x-2)^2 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\tfrac{-1}{2}\right)^n (x-2)^n .$$

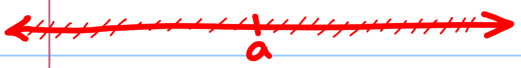
Radius and Interval of Convergence:

- كما سبق من أمثلة توضيحية، نجد أننا في متسلسلات القوى لا نسأل "**هل** المتسلسلة تقاربية أم لا؟" كما كنا نفعل في المتسلسلات العادية، وإنما نسأل "**أين** تكون متسلسلة القوى تقاربية؟"
- لاحظ أنه لأي متسلسلة قوى

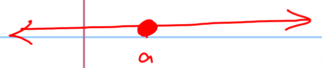
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots$$

فإنها بالتأكيد ستكون تقاربية عندما $x=a$ حيث a هو المركز.

- باستخدام النظريات (راجع الكتاب)، فإنه لأي متسلسلة قوى $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$، يتحقق حالة واحدة من الحالات الثلاثة التالية:

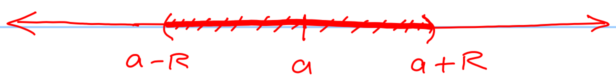


أ- تكون تقاربية لجميع قيم x على R.



ب- تكون تقاربية عند نقطة واحدة فقط هي المركز $x=a$.

جـ- تكون تقاربية على فترة محدودة ومتماثلة حول a طولها $2R$ وحدودها $a-R$ و $a+R$، في هذه الحالة تكون متسلسلة القوى تقاربية تقارب مطلق على الفترة المفتوحة $(a-R, a+R)$، وتباعدية خارجها، أما عند الحدود $a-R$ / $a+R$ فإنها قد تكون تقاربية تقارب مطلق أو مشروط أو قد تكون تباعدية.



- يعرف الرقم R في (جـ) على أنه نصف قطر التقارب (radius of conv) في هذه الحالة تكون المتسلسلة تقاربية تقارب مطلق عندما $|x-a|<R$ أو $x \in (a-R, a+R)$، وتباعدية عندما $|x-a|>R$.

في الحالة (أ) نعرف نصف قطر التقارب $R=\infty$ وتكون المتسلسلة تقاربية عندما $|x-a|<\infty$ أو $x \in R$.

وفي الحالة (ب) نعرف $R=0$.

كما نعرف فترة التقارب (interval of conv) على أنها أكبر فترة تكون المتسلسلة تقاربية عندها، وهي قد تكون مفتوحة أو مغلقة أو نصف مفتوحة.

• إذا كانت متسلسلة القوى هي متسلسلة هندسية (انظر الأمثلة التوضيحية أعلاه) فإنه يمكن إيجاد نصف قطر التقارب وفترة التقارب بسهولة من خلال جعل $|r|<1$ في هذه الحالة تكون متسلسلة القوى. إذا كانت فترة التقارب محدودة تباعدية عند الحدود وخارج الفترة أيضاً، وتكون تقاربية فقط عند نقاط الداخل.

• إذا كانت متسلسلة القوى ليست هندسية، فإننا نستخدم اختبار النسبة (أو الجذر النوني) لإيجاد نصف قطر التقارب، وفي حال كانت فترة التقارب محددة تكون المتسلسلة تقاربية تقارب مطلق على نقاط داخل الفترة وتباعدية على نقاط خارج الفترة، أما النقاط الحدودية فيتم في هذه الحالة فحصها منفردة باستخدام الاختبارات الأخرى. لاحظ هنا أنه لا يوجد احتمالية التقارب المشروط على خارج الفترة لأنه في هذه الحالة تكون $a_n \not\to 0$.

How to Test a Power Series for Convergence

1. *Use the Ratio Test (or Root Test) to find the interval where the series converges absolutely*. Ordinarily, this is an open interval

$$|x - a| < R \qquad \text{or} \qquad a - R < x < a + R.$$

2. *If the interval of absolute convergence is finite, test for convergence or divergence at each endpoint*, as in Examples 3a and b. Use a Comparison Test, the Integral Test, or the Alternating Series Test.

3. *If the interval of absolute convergence is $a - R < x < a + R$, the series diverges for $|x - a| > R$* (it does not even converge conditionally) because the nth term does not approach zero for those values of x.

Examples: Find the radius and the interval of convergence of the following power series:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$

Sol: The series of abs. values is $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n}$

Using root test:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{\sqrt[n]{n}} = |x|$$

[كما قلنا سابقاً، هنا لا نسأل هل $\rho<1$ وإنما نسأل أين $\rho<1$]

So the series converges when $\rho < 1$ or $|x| < 1$

$\Longrightarrow \quad -1 < x < 1$

Hence the radius of convergence

$$R = \frac{\text{طول الفترة}}{2} = \frac{1-(-1)}{2} = \boxed{1}$$

[هنا يمكننا استنتاج أن متسلسلة القوى تقاربية تقارب مطلق داخل الفترة (-1,1) /
ومتباعدة خارجها / أما عند النقاط الحدودية 1 , -1 فإنها قد تكون تقاربية أو تباعدية]

at $x = -1$: The power series is

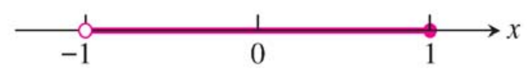
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n}$$

which is divergent. (harmonic series)

at $x = 1$: The power series is $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

which is alternating harmonic series, so it converges conditionally.

Therefore, the interval of convergence is $\boxed{(-1, 1]}$



2) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1}$$

Sol: The series of abs. values is $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^{2n-1}}{2n-1}$.

Using ratio test:

$$\rho = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{2n-1}{|x|^{2n-1}}$$

$$= \lim_{n \to \infty} |x|^2 \frac{2n-1}{2n+1} = |x|^2$$

so the series of abs. values conv. when $|x|^2 < 1 \Longrightarrow$

$|x| < 1 \Longrightarrow -1 < x < 1$.

so the radius of conv. is

$$R = \frac{1-(-1)}{2} = \boxed{1}$$

at $x=-1$: The series is $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-1)^{2n-1}}{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$

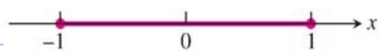
The series of abs. values is $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ which is divergent by LCT ($b_n = \frac{1}{n}$, $\sum b_n$ diverges, and $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{2}$).

Now by AST, $u_n = \frac{1}{2n-1}$, (i) $u_n > 0$, $\forall n \geq 1$
(ii) $u_n' = \frac{-2}{(2n-1)^2} < 0$ so $u_n \searrow$.

(iii) $u_n \longrightarrow 0$,
So it converges

at $x=1$: The series is $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ which is conv. conditionally as above.

Therefore the interval of convergence is $[-1, 1]$.

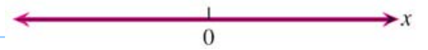


3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

sol: The series of abs. values is $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}$.
Using ratio test:

$$\rho = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n} = \lim \frac{|x|}{n+1} = 0 \quad \forall x.$$

Note that $\rho = 0 < 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$, hence the radius of convergence is $R = \infty$ and the interval of conv. is $(-\infty, \infty)$.



4) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$

sol: The series of abs. values is $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, |x|^n$.

$$\rho = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(n+1)!\, |x|^{n+1}}{n!\, |x|^n}$$

$$= \lim_{n \to \infty} (n+1)|x| = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \infty, & x \neq 0. \end{cases}$$

So $\rho<1$ only if $x=0$, and hence the radius of conv. is $R=0$, and the series converges when $x=0$.

5) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(4x+1)^n$

Sol: يمكن حل السؤال بطريقة مشابهة للأمثلة السابقة، ولكن إذا لاحظنا أنها متسلسلة قوى هندسية فيها $a=1$ و $r=-(4x+1)$ فإنه يمكن حلها بسهولة من خلال فحص المتسلسلات الهندسية بجعل $|r|<1$ كالتالي:

$|r|<1 \Rightarrow |4x+1|<1 \Rightarrow -1<4x+1<1 \Rightarrow$
$-2<4x<0 \Rightarrow -\frac{1}{2}<x<0.$

So the radius of convergence $R=\dfrac{0-(-\frac{1}{2})}{2}=\boxed{\frac{1}{4}}$

and the interval of convergence is $(-\frac{1}{2},0)$

ملحوظة: لم نقم بفحص التقارب الحدودية 0، $-\frac{1}{2}$ لأنه المتسلسلة هندسية وستكون $r=1$ أو $r=-1$ وهي متباعدة عندها.

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(4x-1)^n}{3^n\sqrt{n+1}}$

Sol: The series of abs. values is $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|4x-1|^n}{3^n\sqrt{n+1}}$

By ratio test: $\rho=\lim\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\dfrac{|4x-1|}{3}\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}}$

$=\dfrac{|4x-1|}{3}$. Now, $\rho<1$ when

$\dfrac{|4x-1|}{3}<1$ or $|4x-1|<3 \Rightarrow -3<4x-1<3$

$\Rightarrow -2<4x<4$, so $-\frac{1}{2}<x<1$. Hence the radius of conv. is $R=\dfrac{1+\frac{1}{2}}{2}=\boxed{\frac{3}{4}}$.

At $x=-\frac{1}{2}$: The series is $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-3)^n}{3^n\sqrt{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{\sqrt{n+1}}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} .$$

By LCT, $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\sum b_n$ div. and $\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$

$\Rightarrow \sum \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ diverges.

<u>At $x=1$:</u> The series is $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{3^n \sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$

The series of abs. values $\sum \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ diverges.

So by AST, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

i) $u_n > 0 \ \forall n$, (ii) $u_n' = \left(-\frac{1}{2}\right)(n+1)^{-3/2} < 0$, so $u_n \searrow$, and (iii) $u_n \to 0$,

so the series converges conditionally at $x=1$.

Therefore the interval of convergence is $\left(-\frac{1}{2}, 1\right]$.

Operations on Power Series

THEOREM 19—The Series Multiplication Theorem for Power Series If $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ and $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ converge absolutely for $|x| < R$, and

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},$$

then $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converges absolutely to $A(x)B(x)$ for $|x| < R$:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n .$$

Illustration:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$$

$$= (1 + x + x^2 + \cdots)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots\right) \quad \text{Multiply second series . . .}$$

$$= \underbrace{\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots\right)}_{\text{by } 1} + \underbrace{\left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \cdots\right)}_{\text{by } x} + \underbrace{\left(x^3 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{3} - \cdots\right)}_{\text{by } x^2} + \cdots$$

$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{6} - \frac{x^4}{6} \cdots . \quad \text{and gather the first four powers.}$$

THEOREM 21—The Term-by-Term Differentiation Theorem If $\sum c_n(x-a)^n$ has radius of convergence $R > 0$, it defines a function

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \qquad \text{on the interval} \qquad a - R < x < a + R.$$

This function f has derivatives of all orders inside the interval, and we obtain the derivatives by differentiating the original series term by term:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1},$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(x-a)^{n-2},$$

and so on. Each of these derived series converges at every point of the interval $a - R < x < a + R$.

THEOREM 22—The Term-by-Term Integration Theorem Suppose that

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

converges for $a - R < x < a + R$ $(R > 0)$. Then

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

converges for $a - R < x < a + R$ and

$$\int f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C$$

for $a - R < x < a + R$.

Examples: 1) Find series for f' and f'' if

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad -1 < x < 1.$$

Sol: $$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}, \quad -1 < x < 1,$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = 2 + 6x + 12x^2 + \cdots$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, x^{n-2}, \qquad -1 < x < 1.$$

2) Find series for $f(x) = \tan^{-1} x$, $g(x) = \ln x$.

Sol: Recall that $\tan^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$

But $\frac{1}{1+t^2}$ is the sum of the G.S. with $a = 1$ and

$r = -t^2$, so,

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}$$

$\therefore$

$$\tan^{-1} x = \int_0^x 1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 - \cdots \, dt$$
$$= t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \cdots \Big]_0^x$$
$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

This series converges when $-1 < -t^2 < 1 \implies -1 < x < 1.$

For $g(x) = \ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$, and

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{1-(1-t)} = \frac{a}{1-r}, \qquad -1 < t-1 < 1$$

مجموع متسلسلة هندسية حدها الأول 1 و $r = (1-t) = -(t-1)$ لذا

$$\frac{1}{t} = 1 - (t-1) + (t-1)^2 - (t-1)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (t-1)^n, \qquad 0 < t < 2$$

$$\therefore \ln x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_1^x (-1)^n (t-1)^n \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(t-1)^{n+1}}{n+1} \Big]_1^x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}, \qquad 0 < x < 2$$

$$= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots$$

Examples: Find the radius and the interval of conv. of the following Series:

1) $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n (3x-1)^n}{n^3+1}$

Sol: The series of abs. values $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,|3x-1|^n}{n^3+1}$

Using ratio test: $\displaystyle \rho = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)|3x-1|^{n+1}}{(n+1)^3+1} \cdot \frac{n^3+1}{n\,|3x-1|^n}$

$$= |3x-1| \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right) \cdot \left(\frac{n^3+1}{(n+1)^3+1}\right) = |3x-1|$$

which is conv. when $\rho < 1$ or $|3x-1| < 1$

$$-1 < 3x-1 < 1 \Rightarrow 0 < 3x < 2$$

$\therefore \quad 0 < x < \frac{2}{3}$. So the radius of conv. is $\boxed{R = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}}$

At $x=0$: $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n (-1)^n}{n^3+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$.

This series converges by LCT, where $b_n = \frac{1}{n^2}$, $\sum b_n$ conv. and $\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$.

At $x = \frac{2}{3}$: The series $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n \left(3\cdot\frac{2}{3} - 1\right)^n}{n^3+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^3+1}$

The series of abs. values is $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$ which is convergent

so $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^3+1}$ Conv. abs.

Therefore the interval of convergence is $[0, \frac{2}{3}]$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n+1}} (e-x)^n$

sol: The series has the form $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n+1}} (-(x-e))^n$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\sqrt{n+1}} (x-e)^n$. (So it is Power series)

The series of abs. values is $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n+1}} |x-e|^n$

Using ratio test: $\rho = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{n+1}{\sqrt{n+2}} |x-e|^{n+1} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)|x-e|^n}$

$= |x-e| < 1$ when $e-1 < x < e+1$.

so the radius of conv. is $R = \frac{(e+1)-(e-1)}{2} = \boxed{1}$

At $x = e-1$: The series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\sqrt{n+1}} (-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n+1}}$

which is divergent since $a_n \longrightarrow \infty \neq 0$.

At $x = e+1$: The series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\sqrt{n+1}} 1^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\sqrt{n+1}}$

which is alternating series with $u_n = \frac{n}{\sqrt{n+1}} \longrightarrow \infty \neq 0$

so $\lim \frac{(-1)^n n}{\sqrt{n+1}}$ d.n.e. Thus the series div.

Hence the interval of conv. is $(e-1, e+1)$.

3) Find a Series for the fun $f(x) = \ln(1+x)$

sol: $\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t}$, and $\frac{1}{1+t} = \frac{1}{1-(-t)} = \frac{a}{1-r}$

$\Rightarrow$

$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n, \quad -1 < t < 1$

$\therefore \ln(1+x) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots \Big]_0^x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad -1 < x < 1$.