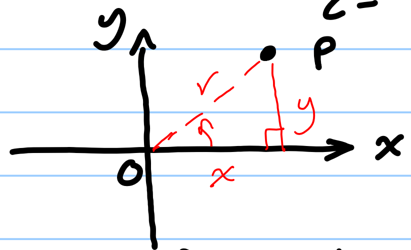
11.3 Polar Coordinates

Note Title ٢٣/٠٦/١٢

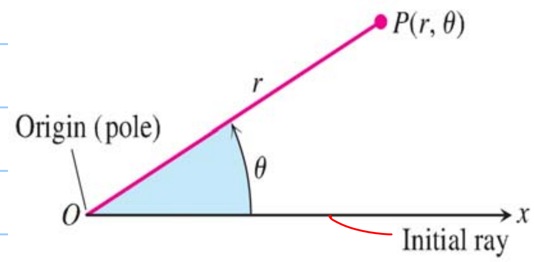
مقدمة : حتى هذه اللحظة / يتم التعامل مع النقاط من المستوى
ومع المنحنيات من خلال نظام الإحداثيات الديكارتية , والمعروفة
بـ Cartesian (or Rectangular) coordinate ، بالرغم من ذلك
فإن هذه الإحداثيات على الرغم من شهرتها ليست وحيدة .

بشكل عام نظام الإحداثيات ليس أكثر من طريقة محددة لتعريف نقطة
في المستوى (أو في الفضاء) . لتوضيح ذلك ، افرض أنه لدينا
نقطة P من المستوى xy .



في الإحداثيات الديكارتية ، نعرف النقطة P بأنها $P(x,y)$ حيث
x هي المسافة الأفقية و y هي المسافة الرأسية و الإشارة تحدد
الاتجاه . هذه الطريقة ليست الوحيدة كما قلنا ، فيمكن تعريف
النقطة P من خلال المسافة المباشرة r بين النقطة P ونقطة الأصل
والزاوية θ التي يصنعها الشعاع $\overrightarrow{OP}$ مع الاتجاه الموجب لمحور
x وتكون $P(r,\theta)$ هو تعريف النقطة من الإحداثيات الجديد ،
هذه الإحداثيات تسمى polar coordinates .

Definition of Polar Coordinates



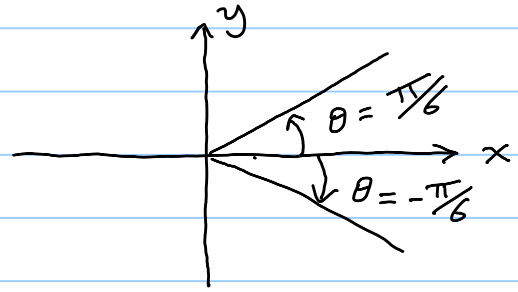
Def: Polar Coordinates (الإحداثيات القطبية)

$P(r, \theta)$

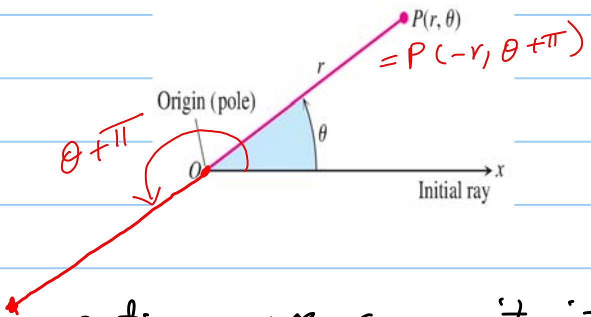
- r: Directed distance from O to P
- θ: Directed angle from initial ray to OP

Remarks:

1) θ will be positive if the directed angle from initial ray to OP is measured counterclockwise, and will be negative if the directed angle is measured clockwise.



2) The above definition may lead us to think that r must be a positive number. However, we also allow r to be negative if we reach the point backward; that is, if r is positive, the point will be in the same quadrant as θ, and if r is negative, the point will be end up in the quadrant exactly opposite θ. So if P has polar coordinat $P(r,\theta)$ where $r>0$, then we can take its polar coordinate $P(-r, \theta+\pi)$ where $-r$ will be negative, Look at the figure.

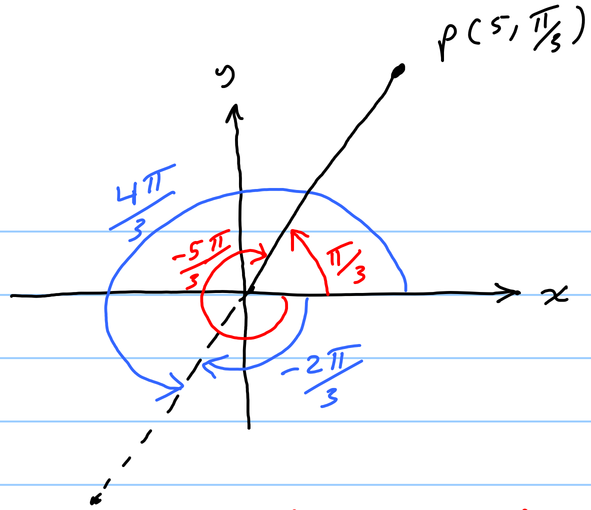


In general, if r is negative, we can write it positive by adding or subtracting π to the angle θ.

3) The representation of a point P in polar coordinate is not unique as in Cartesian coordinates, in fact, it has infinitly many pairs of polar coordinates. For instance, the following four points are all coordinates for the same point:

$$(5, \pi/3) = (5, -\tfrac{5\pi}{3}) = (-5, \tfrac{4\pi}{3}) = (-5, -\tfrac{2\pi}{3})$$

Here is a sketch of the angles used in these four coordinates:



Example: Find all polar coordinate of the point $P(2, \pi/4)$.

Sol: If $r = 2$: then $\theta = \pi/4 + 2n\pi$, $n = 0, \mp1, \mp2, \dots$

If $r = -2$: then $\theta = \left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) + 2n\pi$, $n = 0, \mp1, \mp2, \dots$

Therefore

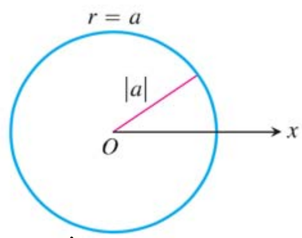
$$P(2, \pi/4) = P(2, \pi/4 + 2n\pi) = P\left(-2, \frac{5\pi}{4} + 2n\pi\right), \quad n = 0, \mp1, \mp2, \dots$$

ملحوظة: بشكل عام لأي نقطة $P(r, \theta)$ فإن جميع الإحداثيات القطبية المتكافئة لهذه النقطة تأخذ الشكل

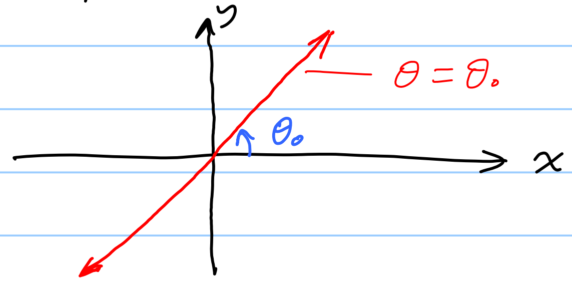
$$P(r,\theta) = P(r, \theta + 2n\pi) = P(-r, \theta + (2n+1)\pi), \quad n \text{ any integer.}$$

Polar Equations and Graphs:

المعادلات باستخدام الإحداثيات القطبية تشبه المعادلات العادية في الإحداثيات الديكارتية مع مراعاة ما تمثله x و y وما تمثله r و θ. مثال ذلك المعادلة $r = a$ هي معادلة منحنى يبعد مسافة ثابتة $|a|$ عن نقطة الأصل بدون شرط على θ وبالتالي θ تتغير على كل القيم وهذه معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها $r = |a|$



والمعادلة $\theta = \theta_0$ هي معادلة منحنى يصنع زاوية ثابتة على initial ray ولكن r تتغير لتأخذ كل القيم (الموجبة والسالبة) على $\mathbb{R}$ وبالتالي تكون المعادلة هي معادلة خط مستقيم ميله $m = \tan\theta_0$ ويمر بنقطة الأصل.

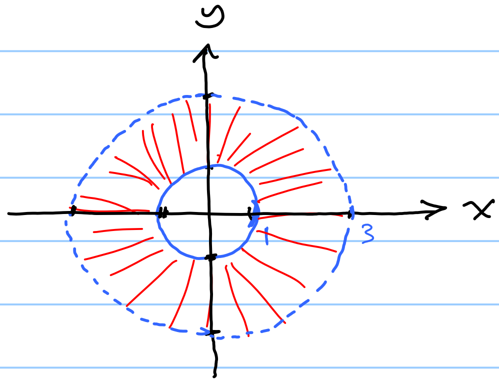


Equation	Graph
$r = a$	Circle of radius $\lvert a \rvert$ centered at O
$\theta = \theta_0$	Line through O making an angle θ_0 with the initial ray

Examples: Graph the sets of points whose polar coordinates satisfy the following equations and inequalities:

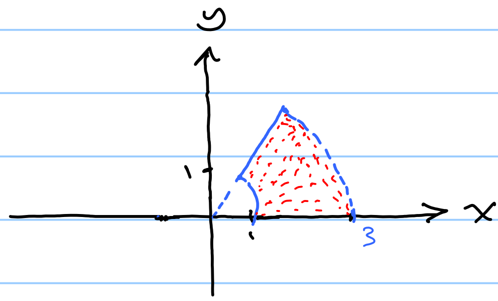
a) $1 \le r < 3$

Sol:



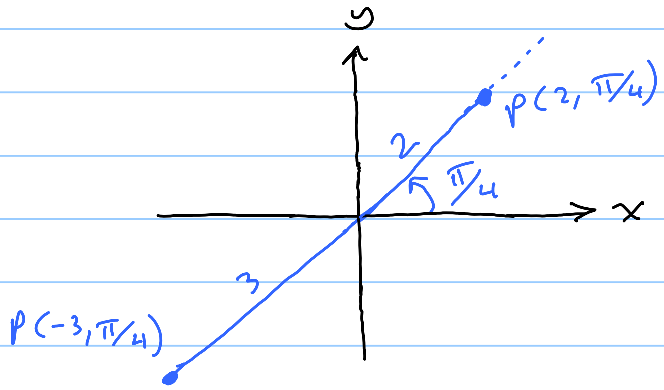
b) $1 \le r \le 3$ and $0 \le \theta \le \pi/3$

Sol:

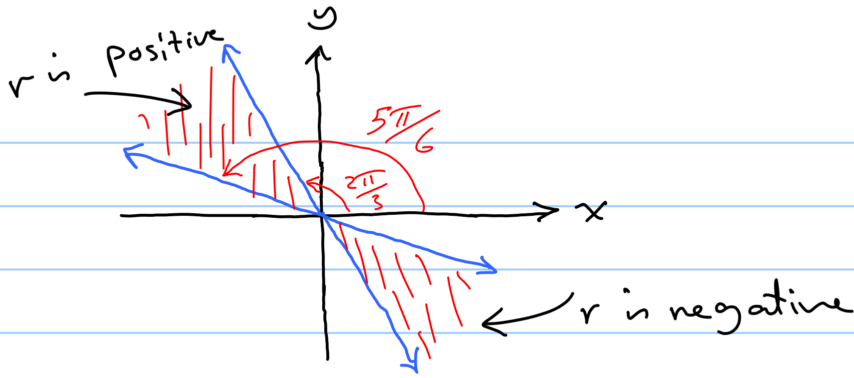


c) $-3 \le r < 2$ and $\theta = \pi/4$

Sol:

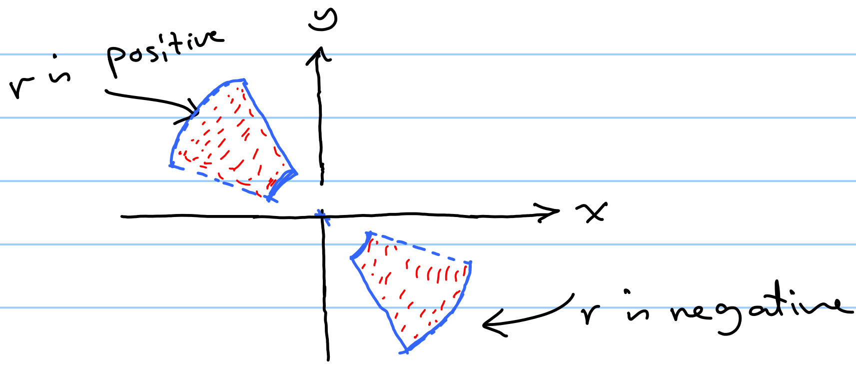


d) $\frac{2\pi}{3} \le \theta \le \frac{5\pi}{6}$ (no restriction on r)



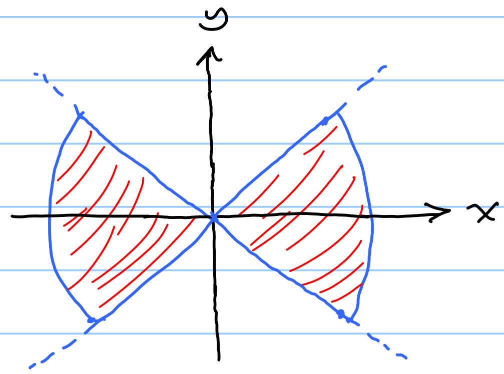
e) $\frac{2\pi}{3} \leq \theta < \frac{5\pi}{6}$ and $1 \leq |r| \leq 2$

sol: Firstly note that "$1 \leq |r| \leq 2$" $\equiv$ "$1 \leq r \leq 2$ or $-1 \geq r \geq -2$"

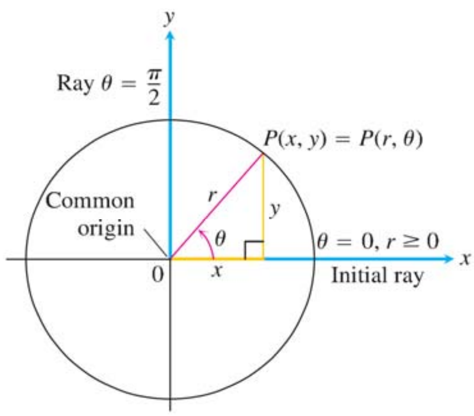


f) $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ and $-1 \leq r \leq 1$

sol:



Relating Polar and Cartesian Coordinates



Equations Relating Polar and Cartesian Coordinates

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad r^2 = x^2 + y^2, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

ملحوظات : 1) لاحظ أننا لم نكتب $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ لأن الدالة $\tan^{-1}x$ كزاوية هي من الربع الأول و الرابع ، لكن θ يمكنه أن تأخذ زاوية من أي ربع وهي تحقق $\tan\theta = \frac{y}{x}$ ، وعليه فإن العبارة $\tan\theta = \frac{y}{x}$ لا تكافئ $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$.

2) إذا أردنا استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد θ ، وبعد مراعاه الملحوظة السابقة يجب الإنتباه للإجابة من الآلة الحاسبة فإذا كانت θ المطلوبة هي في الربع الأول أو الرابع بنفس ما حصلنا عليه من الآلة الحاسبة نعتمدها و إلا ستكون θ المطلوبة لنا هي ما حصلنا عليه من الآلة الحاسبة مجموعاً له π ،

Examples:

1) Convert each of the following points into the given coordinate system:

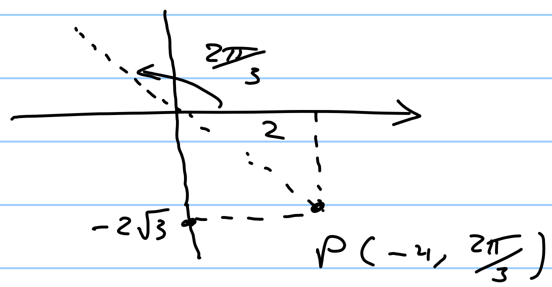
a) $(-4, \frac{2\pi}{3})$ into Cartesian coordinates

b) $(-1, 1)$ into polar coordinates.

Sol: a) $x = r\cos\theta = -4 * \cos(\frac{2\pi}{3}) = -4 * -\frac{1}{2} = 2$

$y = r\sin\theta = -4 * \sin(\frac{2\pi}{3}) = -4 * \frac{\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3}$

$\therefore\ P(x, y) = P(2, -2\sqrt{3})$



b) لاحظ بداية أن $P(-1,1)$ النقطة تقع في الربع الثاني

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

$\tan\theta = \frac{1}{-1} = -1 \implies \theta = \tan^{-1}(-1) + \pi = \frac{3\pi}{4}$

لاحظ هنا أن $\tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ زاوية في الربع الرابع والزاوية θ المطلوبة تعاكس الإتجاه المعاكس تماماً في الربع الثاني .

2) Convert each of the following into the given coordinate system:

a) $r = a$ (into Cartesian coordinate)

sol: $r^2 = a^2 \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = a^2}$

b) $\theta = \theta_0 \Rightarrow \tan\theta = \tan\theta_0 = m$ (رقم)

$\therefore \frac{y}{x} = m \Rightarrow \boxed{y = mx}$

c) $2x - 5x^3 = 1 + xy$ (into polar coordinate)

sol: $2(r\cos\theta) - 5(r\cos\theta)^3 = 1 + (r\cos\theta)(r\sin\theta)$

$\Rightarrow 2r\cos\theta - 5r^3\cos^3\theta = 1 + r^2\sin\theta\cos\theta$

d) $r = -8\cos\theta$ (into Cartesian coordinate)

sol: $r^2 = -8r\cos\theta \Rightarrow x^2 + y^2 = -8x$

e) $x^2 + (y-3)^2 = 9$

sol: $x^2 + y^2 - 6y + 9 = 9 \Rightarrow (x^2+y^2) - 6y = 0$

$\Rightarrow r^2 - 6r\sin\theta = 0 \Rightarrow r = 0$ or $r = 6\sin\theta$

لاحظ أنه عندما $\theta = 0$ في المعادلة الثانية نجد أنه $r = 6\sin 0 = 0$

وهي المعادلة الأولى ضمناً لذا فإن المعادلة الثانية تشمل الأولى وعليه

فإن المعادلة الديكارتية تكافئ المعادلة القطبية

$$\boxed{r = 6\sin\theta}$$

f) $r = \frac{4}{2\cos\theta - \sin\theta}$

$\Rightarrow 2r\cos\theta - r\sin\theta = 4 \Rightarrow \boxed{2x - y = 4}$

g) $r = 4\tan\theta \cdot \sec\theta$

sol: $r = 4\dfrac{\tan\theta}{\cos\theta} \Rightarrow r\cos\theta = 4\tan\theta$

$$\Rightarrow x = 4\frac{y}{x} \Rightarrow 4y = x^2 \Rightarrow \boxed{y = \frac{x^2}{4}}$$

h) $x^2 - xy + y^2 = 1$

sol:

$$r^2\cos^2\theta - (r\cos\theta)(r\sin\theta) + r^2\sin^2\theta = 1$$

$$r^2(\cos^2\theta - \cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta) = 1$$

K) $r\sin(\theta + \pi/6) = 2$

sol: $r(\sin\theta\cos\pi/6 + \cos\theta\sin\pi/6) = 2$

$$(r\sin\theta)\frac{\sqrt{3}}{2} + (r\cos\theta)\frac{1}{2} = 2$$

$$\therefore \boxed{\sqrt{3}\,y + x = 4}$$

l) $r^2\sin 2\theta = 2$

sol: $r^2(2\sin\theta\cos\theta) = 2$

$$\therefore (r\sin\theta)(r\cos\theta) = 1$$

$$\boxed{xy = 1}$$

ملحوظة: إذا كان لدينا المنحنى $F(r,\theta) = 0$ ، وأردنا فحص نقطة $P(r_0, \theta_0)$ ما إذا كانت تقع على المنحنى ، فإننا نقوم بالتعويض في المعادلة ، فإذا تحققت فإن النقطة تقع على المنحنى بشكل مباشر من خلال الزاوية θ_0 ، وإذا لم تتحقق المعادلة ، فإن هذا يعني أنها لا تقع بشكل مباشر من خلال θ_0 ولكنها قد تقع بشكل عكسي من خلال الزاوية $\theta_0 + \pi$ كما يوضح المثال التالي .

Example: Is the curve $r = 2\sin 2\theta$ passes through the point $p(2, 3\pi/4)$??

Sol: Set $F(r,\theta) = r - 2\sin 2\theta = 0$.

Consider $F(2, 3\pi/4) = 2 - 2\sin 3\pi/2 = 4 \neq 0$

Note that $p(2, \frac{3\pi}{4}) = p(-2, \frac{3\pi}{4} - \pi) = p(-2, \frac{-\pi}{4})$

$F(-2, -\pi/4) = -2 - 2\sin(-\pi/2) = -2 + 2 = 0$

so the point $p(-2, -\pi/4) = p(2, \frac{3\pi}{4})$ lies on the graph.