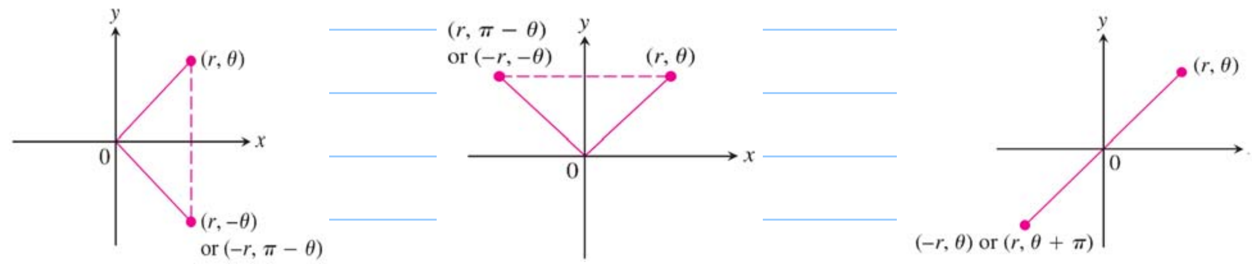
11.4 Graphing in Polar Coordinates

Symmetry:

Symmetry Tests for Polar Graphs

1. *Symmetry about the x-axis:* If the point (r, θ) lies on the graph, then the point $(r, -\theta)$ or $(-r, \pi - \theta)$ lies on the graph (Figure 11.26a).
2. *Symmetry about the y-axis:* If the point (r, θ) lies on the graph, then the point $(r, \pi - \theta)$ or $(-r, -\theta)$ lies on the graph (Figure 11.26b).
3. *Symmetry about the origin:* If the point (r, θ) lies on the graph, then the point $(-r, \theta)$ or $(r, \theta + \pi)$ lies on the graph (Figure 11.26c).



(a) About the x-axis (b) About the y-axis (c) About the origin

ملحوظة: في أي منحنى، إذا تحقق تماثلان من أي نوع فإن التماثل الثالث يكون بالتأكيد متحقق، وعليه فإنه لا يمكن أن يكون لمنحنى تماثلان فقط. بعبارة أخرى المنحنى يحقق حالة من الحالات التالية:

١- ليس له أي نوع من التماثلات

٢- له تماثل واحد فقط.

٣- له ثلاث تماثلات.

والتماثلات عادة تساعد من عملية رسم المنحنيات.

Slope:

إذا كان لدينا منحنى معطى بالمعادلات القطبية $r = f(\theta)$، فإن ميل المنحنى لا زال يعطى بالعلاقة $\frac{dy}{dx}$، ولكن $\frac{dy}{dx} \neq f'(\theta)$، ولإيجاد $\frac{dy}{dx}$ تذكر أن

$$x = r\cos\theta \quad \text{and} \quad y = r\sin\theta$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = -r\sin\theta + \cos\theta \cdot \frac{dr}{d\theta} = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta$$

$$\text{and} \quad \frac{dy}{d\theta} = r\cos\theta + \sin\theta \cdot \frac{dr}{d\theta} = f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta}$$

$$= \frac{r'\sin\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\sin\theta}$$ (بشرط المقام لا يساوي صفراً)

- If the graph of $r = f(\theta)$ passes through the origin at the angle $\theta = \theta_0$, then the slope of the curve at $(0, \theta_0)$ is

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r'\sin\theta_0}{r'\cos\theta_0} = \tan\theta_0$$

Example: Find the slope of the curve

$$r = 1 + 2\cos\theta \quad \text{at} \quad \theta = -\pi/2$$

<u>Sol:</u> $r' = \frac{dr}{d\theta} = -2\sin\theta$

Now $r'(-\pi/2) = -2 \cdot -1 = 2$

$r(\pi/2) = 1 + 2\cos(-\pi/2) = 1$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=-\pi/2} = \left.\frac{r'\sin\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\sin\theta}\right|_{\theta=-\pi/2}$$

$$= \frac{2 \cdot -1 + 1 * 0}{2 * 0 - 1 * -1} = \frac{-2}{1} = \boxed{-2}$$

Examples: Sketch the graph of the following:

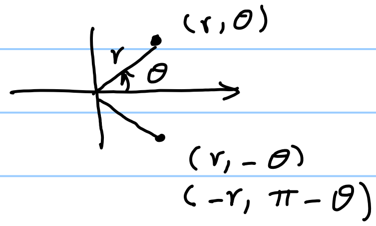
1) $r = 1 - \cos\theta$ (Cardioid)

<u>Sol:</u> <u>الخطوة الأولى</u> في رسم المنحنيات المعرفة بالإحداثيات القطبية / نبدأ بفحص التماثلات لأنها تساعد في عملية الرسم.

فحص التماثلات أعد كتابة المعادلة بالصورة $F(r,\theta)=0$ وبالتالي

$(r,\theta) \in Graph \Longrightarrow F(r,\theta) = r + \cos\theta - 1 = 0$ --- (*)

about x: Is $(r,-\theta) \in G$??

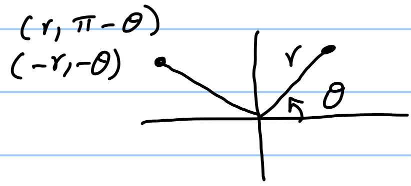


Consider $F(r,-\theta) = r + \cos(-\theta) - 1$

$= r + \cos\theta - 1 \overset{(*)}{=} 0$

$\Rightarrow (r,-\theta) \in G \Rightarrow \exists$ a symmetric about x-axis

about y: Is $(r,\pi-\theta) \in G$??



Consider $F(r,\pi-\theta) = r + \cos(\pi-\theta) - 1$

$= r + \cos\pi\cos\theta + \sin\pi\sin\theta - 1$

$= r - \cos\theta - 1 \overset{(*)}{\neq} 0$

النقطة لا تقع على المنحنى بشكل مباشر / هذا لا يعني أنها لا تقع على المنحنى فقد تقع على المنحنى بالشكل العكسي.

Is $(-r,-\theta) \in G$??

Consider $F(-r,-\theta) = -r + \cos(-\theta) - 1 = -r + \cos\theta - 1 \overset{(*)}{\neq} 0$

$\Rightarrow \nexists$ symmetric about y-axis.

لأنه وجود تماثلان يؤدي لوجود التماثل الثالث هذا يعني بالضرورة عدم وجود تماثل حول نقطة الأصل

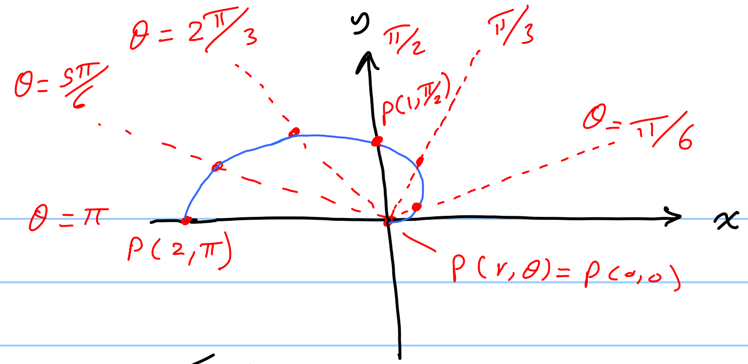
$\Rightarrow \nexists$ symmetric about origin

الخطوة الثانية في الرسم هي عمل جدول لقيم r,θ مع الأخذ بعين الاعتبار ما إذا كانت r دورية في θ بالإضافة للتماثلات.

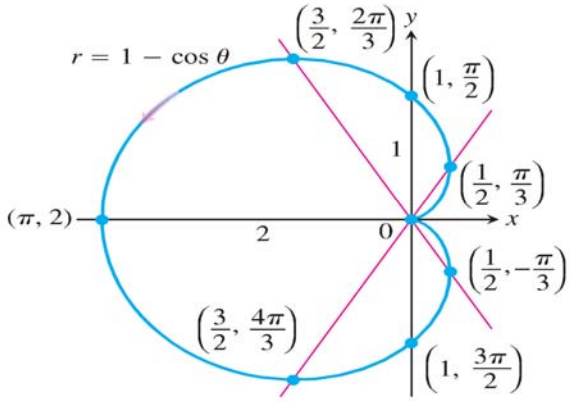
في هذا المثال، بما أن قيمة r تتكرر كل فترة 2π ولوجود تماثل حول x يكفينا أخذ θ من 0 إلى π.

θ	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	0	0.134	0.5	1	1.5	1.866	2

الخطوة الثالثة في الرسم هو وضع هذه النقاط $p(r,\theta)$ على المستوى xy ثم استخدام التماثل كما يلي:



ما تم رسمه يمثل نصف الرسمة و النصف الآخر يمكن الحصول عليه بالتماثل حول x
نعكس الرسمة لنحصل على



ملاحظة: Cardioid (رأس القلب) بشكل عام يأخذ المعادلة العامة

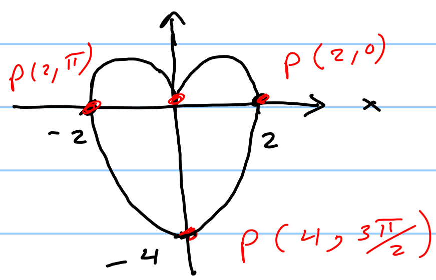
$$r = a + a\cos\theta \quad \text{or} \quad r = a + a\sin\theta$$

في المعادلة $r = a + a\cos\theta$ يكون محور رأس القلب هو محور x و التماثل يكون حول
أما الرأس $2a$ فيكون حسب إشارة $\cos\theta$ إما على الشق الموجب لمحور x
و إما على الشق السالب لمحور x /
أما المعادلة $r = a + a\sin\theta$ فيكون التماثل حول y ويكون المحور هو y /
و يكون الرأس $2a$ إما على الشق الموجب أو السالب للمحور حسب إشارة $\sin\theta$.

أمثلة: ① $r = 2 - 2\sin\theta$ y (Cardioid)

محور y

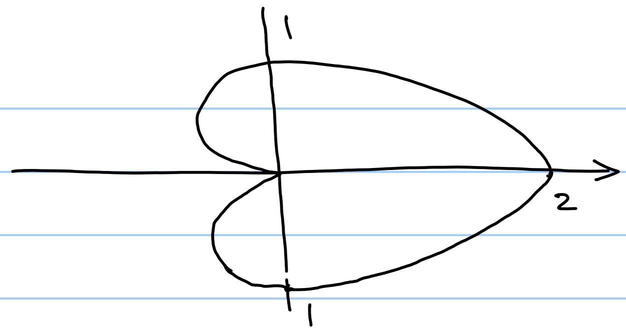
الرأس على الشق السالب لمحور y عند -4 .



موجب

② $r = -1 + \cos\theta =$

cardioid محوره محور x ورأسه على الشق الموجب لمحور x



وهكذا

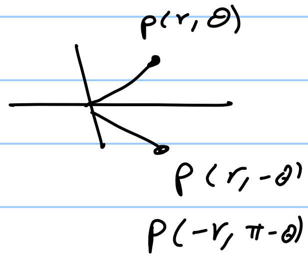
2) $r = 1 + 2\sin\theta$

نفحص التماثل: أولاً

Set $F(r,\theta) = r - 2\sin\theta - 1$

$\Longrightarrow (r,\theta) \in G$ iff

$F(r,\theta) = r - 2\sin\theta - 1 = 0 \quad ---- \quad (*)$



about x-axis: Is $p(r,-\theta) \in G$??

$F(r,-\theta) = r - 2\sin(-\theta) - 1$

$= r + 2\sin\theta - 1 \overset{(*)}{\neq} 0$

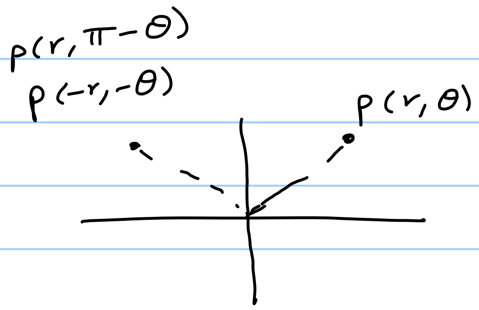
Is $p(-r,\pi-\theta) \in G$??

$F(-r,\pi-\theta) = -r - 2\sin(\pi-\theta) - 1$

$= -r - 2(\sin\pi\cos\theta - \cos\pi\sin\theta) - 1$

$= -r - 2\sin\theta - 1 \overset{(*)}{\neq} 0$

$\nexists$ symmetric about x-axis.



about y-axis: Is $p(r,\pi-\theta) \in G$??

$F(r,\pi-\theta) = r - 2\sin(\pi-\theta) - 1$

$= r - 2\sin\theta - 1 \overset{(*)}{=} 0$

$\Longrightarrow \exists$ symmetric about y-axis.

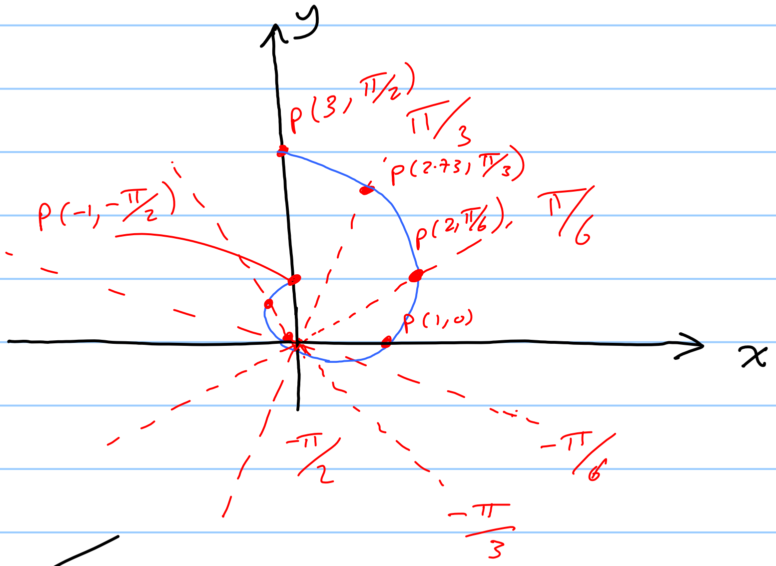
لابد وجود تماثلان يؤدي لوجود الثالث ، بإنه لا يمكن انه يكون هناك تماثل حول الأصل .

لعمل جدول ل (r,θ) نلاحظ انه الدالة تتكرر كل 2π ولوجود تماثل حول y فإننا لا نحتاج لكل قيم الدورة وإنما يكفينا انه نأخذ نصف الدورة لعمل نصف دالة و النصف الآخر نوجده بالتماثل (ويمكن ايجاد الدالة بأكملها)

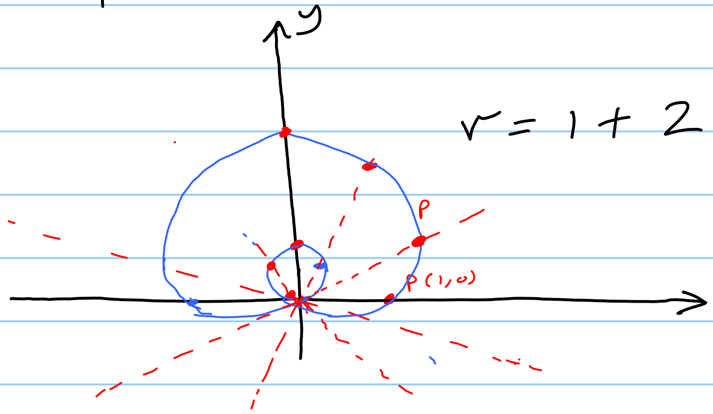
ولأنه التماثل حول y ، بإنه يلزمنا انه نرسم ما الربع الأول والرابع ثم نقوم بعمل تماثلا حول y

لذا سنختار θ القيم من $-\pi/2$ إلى $\pi/2$.

θ	$-\pi/2$	$-\pi/3$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$
r	-1	-0.73	0	1	2	2.73	3



ما تم رسمه يمثل نصف المنحنى / ولإكماله يجب استخدام التماثل حول y
(أو عمل بقية قيم θ)



$r = 1 + 2\sin\theta$.

المنحنى السابق اسمه Limacon with inner loop ويخضع في سلوكه لملاحظة شبيهة بملاحظة رأس القلب - Cardiod - راجع الملاحظة i أعلاه / ولذلك

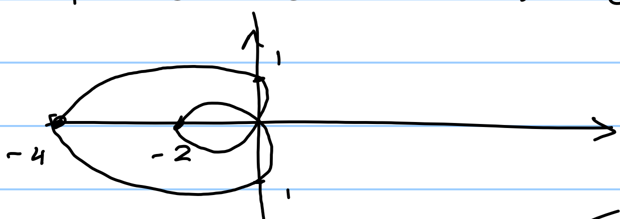
$$r = a + b\sin\theta \quad \text{or} \quad r = a + b\cos\theta$$

حيث $1 < \left|\frac{a}{b}\right| < 2$ لها شكل شابه للسابق .

مثال :

المرشى على الشعاع السالب   محور التماثل هو x

$r = 1 - 3\cos\theta$ has graph



تمرين : إدرس الشكل للمنحنى $r = a + b\cos\theta$ إذا
كانت $\left|\frac{a}{b}\right| > 2$

3) $r^2 = 4\cos 2\theta$

<u>Sol:</u> $F(r,\theta) = r^2 - 4\cos 2\theta$

$(r,\theta) \in G \implies F(r,\theta) = r^2 - 4\cos 2\theta = 0 \quad ---- (*)$

فحص التماثل

<u>حول x</u> : Is $P(r,-\theta) \in G$??

Consider $F(r,-\theta) = r^2 - 4\cos(-2\theta) = r^2 - 4\cos 2\theta \overset{(*)}{=} 0$ ✓

<u>حول y</u> : Is $P(-r,-\theta) \in G$??

Consider $F(-r,-\theta) = (-r)^2 - 4\cos(-2\theta) = r^2 - 4\cos 2\theta = 0$ ✓

so $\exists$ symmetric about x-axis and about y-axis,

so $\exists$ symmetric about origin.

قبل عمل جدول لقيم r,θ نلاحظ من المعادلة أن $r^2 = 4\cos 2\theta$ يجب ألا تكون سالبة

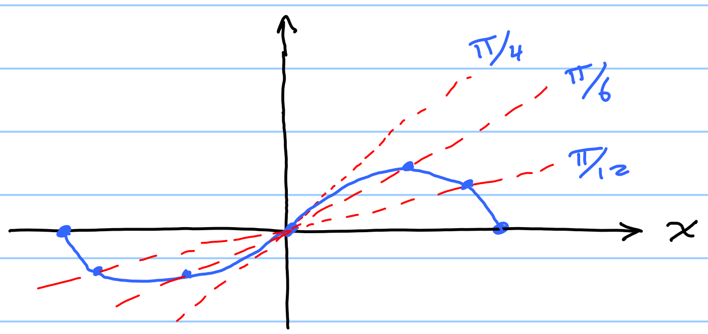
وعليه فإن 2θ يجب أن تكون من الربع الأول أو الرابع فقط وإلا فإن r^2

تساوي رقم سالب.

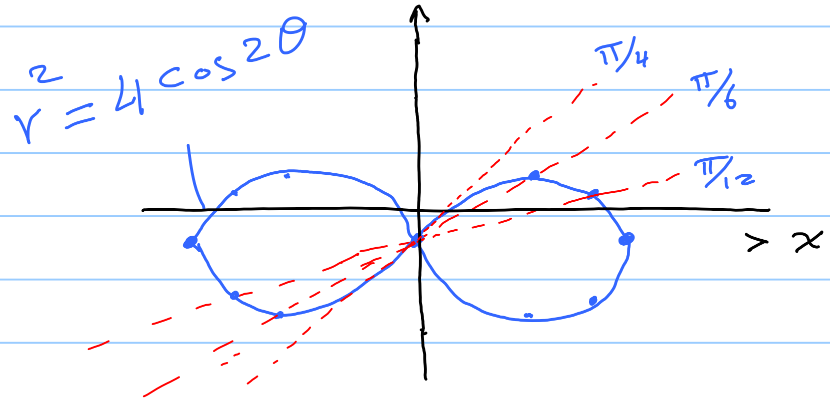
لوجود التماثلات الثلاثة نأخذ 2θ من الربع الأول ونستخدم التماثلات

يعني $0 \le 2\theta \le \pi/2 \implies 0 \le \theta \le \pi/4$

θ	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$
$r = \mp\sqrt{4\cos 2\theta}$	∓ 2	∓ 1.86	∓ 1.414	0



وباستخدام التماثل حول x وحول y وحول الأصل نجد أن الرسمة المطلوبة هي



4) $r^2 = 4\sin 2\theta$

$(r,\theta) \in G \implies F(r,\theta) = r^2 - 4\sin 2\theta = 0 \quad ---- (*)$.

فحص التماثلات

<u>about x:</u> Is $p(r,-\theta) \in G$??

$$F(r,-\theta) = r^2 - 4\sin(-2\theta) = r^2 + 4\sin 2\theta \overset{(*)}{\neq} 0$$

$p(r,-\theta) = p(-r, \pi-\theta)$.

$$F(-r,\pi-\theta) = (-r)^2 - 4\sin(2\pi - 2\theta) = r^2 - 4(\sin 2\pi \cos 2\theta - \cos 2\pi \sin 2\theta) = r^2 + 4\sin 2\theta \overset{(*)}{\neq} 0$$

$\therefore \nexists$ symmetric about x-xis.

<u>about origin:</u> Is $(-r,\theta) \in G$??

$$F(-r,\theta) = (-r)^2 - 4\sin 2\theta = r^2 - 4\sin 2\theta \overset{(*)}{=} 0.$$

$\exists$ a symmetric about origin.

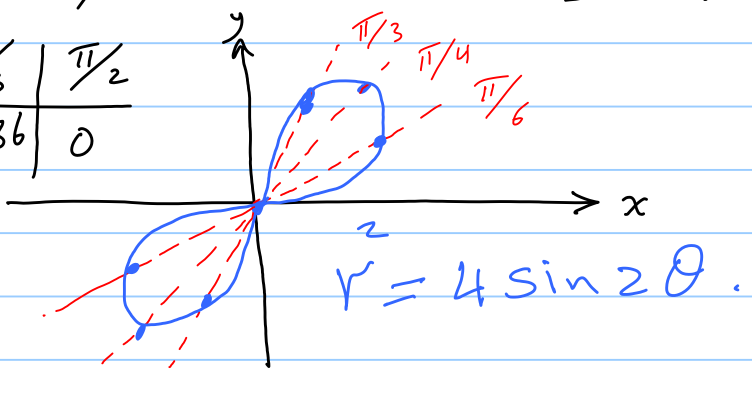
$\implies \nexists$ symmetric about y-axis.

لأن المنحنى $r^2 = 4\sin 2\theta$ لا يجب أن يساوي صفراً بالسالب الزاوية 2θ يجب أن تكون من الربع الأول أو الثاني فقط وعليه

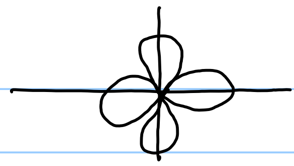
$$0 \le \theta \le \pi/2 \Longleftarrow 0 \le 2\theta \le \pi$$

فيم θ المناسبة هي $\theta \in \{0, \pi/2\}$ ونستخدم التماثل حول الأصل.

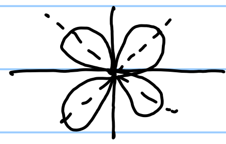
θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$r = \mp\sqrt{4\sin 2\theta}$	0	∓ 1.86	∓ 2	∓ 1.86	0



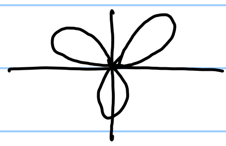
5) $r = 4\cos 2\theta$



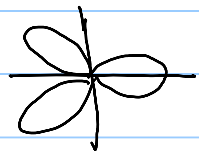
$r = 4\sin 2\theta$



$r = \sin 3\theta$



$r = \cos 3\theta$



حاول ايجاد التفاصيل من حل المثال (5) ورسم المنحنيات بشكل أوضح وأدق