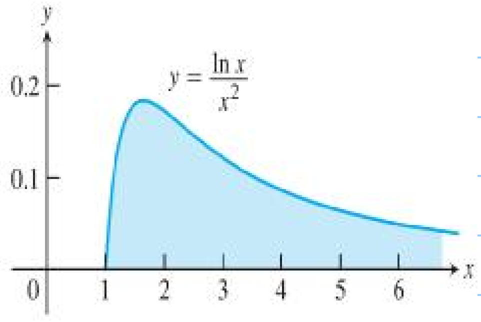
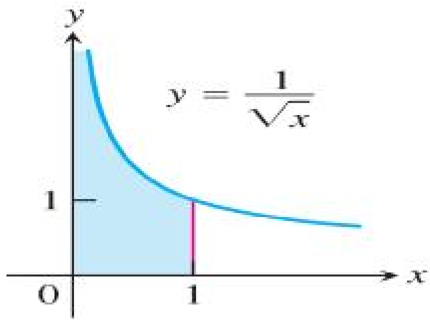
8.7 Improper Integrals

حتى الآن ، نشترط لإيجاد تكامل محدود أن يكون مجال الدالة محدوداً $[a,b]$ وأن يكون المدى محدود أيضاً. لكن في التطبيقات على التكاملات المحددة ، قد نواجه أن يكون أحد الشرطين أو كلاهما غير متحقق ، مثال ذلك: المساحة تحت المنحنى $y=\frac{\ln x}{x^2}$ من $x=1$ حتى $x=\infty$ مثال لتكامل على مجال لا نهائي ، والمساحة تحت المنحنى $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ من $x=0$ حتى $x=1$ هو مثال آخر على مدى لا نهائي (انظر الرسومات)

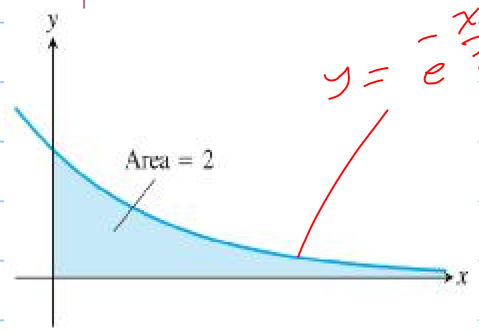




يسمى هذا النوع من التكاملات improper integral وهو يلعب دوراً مهماً في فحص التقارب للمتسلسلات اللانهائية كما سندرس لاحقاً

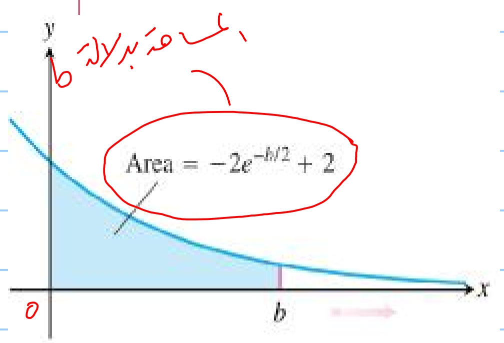
Infinite Limits of Integration

$y = e^{-x/2}$



إذا أردنا إيجاد المساحة تحت المنحنى $y=e^{-x/2}$ في الربع الأول وهي مساحة منطقة ممتدة إلى ما لا نهاية ، نعتقد للوهلة الأولى أنها مساحة لانهائية ، ولكننا سنجد أنها غير ذلك ، ولكن السؤال هنا هو كيف نقوم بحساب هذه المساحة وبأي طريقة ؟؟

الطريقة المتبعة لإيجاد مثل هذه المساحات إن كانت محدودة أن نقوم بحساب المساحة من $x=0$ إلى $x=b>0$ وتكون قيمة المساحة بدلالة b ، ثم بعدها نأخذ $b\to\infty$ (انظر الرسمة)



$$A(b) = \int_0^b e^{-\frac{x}{2}} dx = -2 e^{-\frac{x}{2}} \Big]_0^b = -2e^{-b/2} + 2$$

$$\therefore \quad \text{Area} = \lim_{b \to \infty} \left[-2e^{-b/2} + 2 \right] = 2 \ (\text{units})^2 \quad [\text{finite}]$$

DEFINITION Integrals with infinite limits of integration are **improper integrals of Type I**.

1. If $f(x)$ is continuous on $[a, \infty)$, then

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

2. If $f(x)$ is continuous on $(-\infty, b]$, then

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

3. If $f(x)$ is continuous on $(-\infty, \infty)$, then

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx,$$

where c is any real number.

In each case, if the limit is finite we say that the improper integral **converges** and that the limit is the **value** of the improper integral. If the limit fails to exist, the improper integral **diverges**.

EXAMPLE 1 Is the area under the curve $y = (\ln x)/x^2$ from $x = 1$ to $x = \infty$ finite? If so, what is its value?

Sol: consider the area from $x=1$ to $x=b$

$$A(b) = \int_1^b \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$u = \ln x \qquad dv = \frac{1}{x^2} dx$

$du = \frac{1}{x} dx \qquad v = \frac{-1}{x}$

$$= \frac{-\ln x}{x} \Big]_1^b + \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \frac{-\ln b}{b} - \frac{1}{x} \Big]_1^b = \frac{-\ln b}{b} - \frac{1}{b} + 1$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\, dx = \lim_{b \to \infty} \Big[\overset{L.R}{\frac{-\ln b}{b}} - \frac{1}{b} + 1 \Big] = \boxed{1} \text{ finite}$$

So the improper integral converges and the area has finite value 1.

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{16\, e^{-\tan^{-1} x}}{1+x^2}\, dx$

Sol:
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{16\, e^{-\tan^{-1} x}}{1+x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{16\, e^{-\tan^{-1} x}}{1+x^2}\, dx + \int_{0}^{\infty} \frac{16\, e^{-\tan^{-1} x}}{1+x^2}\, dx$$

Consider the integral

$$\int \frac{16\, e^{-\tan^{-1} x}}{1+x^2}\, dx \qquad u = \tan^{-1} x, \quad du = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \int 16\, e^{-u}\, du = -16\, e^{-u} + C = -16\, e^{-\tan^{-1} x} + C$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{0} \frac{16\, e^{-\tan^{-1} x}}{1+x^2}\, dx = \lim_{b \to -\infty} \Big[-16\, e^{-\tan^{-1} x} \Big]_b^0$$

$$= \lim_{b \to -\infty} \Big[-16 + 16\, e^{-\tan^{-1} b} \Big] = 16\, e^{\pi/2} - 16$$

وأيضاً
$$\int_{0}^{\infty} \frac{16\, e^{-\tan^{-1} x}}{1+x^2}\, dx = \lim_{b \to \infty} \Big[-16\, e^{-\tan^{-1} x} \Big]_0^b$$

$$= \lim_{b \to \infty} \Big[-16\, e^{-\tan^{-1} b} + 16 \Big] = -16\, e^{-\pi/2} + 16$$

Since the two improper integrals converge, then we have that the improper integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{16\, e^{-\tan^{-1} x}}{1+x^2}\, dx = 16 \Big[e^{\pi/2} - e^{-\pi/2} \Big] = 32 \sinh(\pi/2)$$

(p - integral)

EXAMPLE 3 For what values of p does the integral $\int_1^\infty dx/x^p$ converge? When the integral does converge, what is its value?

Sol: For $p \neq 1$:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty} \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{1-p}\left[b^{1-p} - 1\right]$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{p-1} & , p>1 \\ \infty & , p<1 \end{cases}$$

So the improper integral converges to $\frac{1}{p-1}$ if $p>1$ and diverges if $p<1$.

For $p=1$: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \ln x \Big]_1^b$

$= \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty$ diverges.

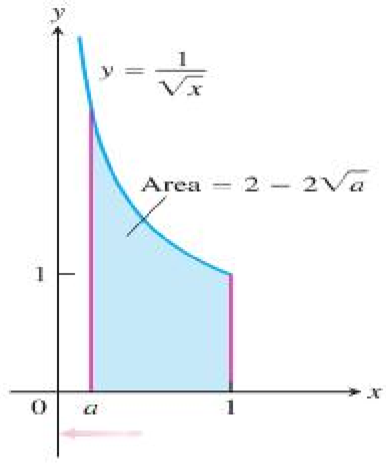
$\therefore$ $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ is $\begin{cases} \text{divergent if } p \le 1, \\ \text{convergent to } \frac{1}{p-1} \text{ if } p>1. \end{cases}$

For Example: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^{1.001}} = \frac{1}{1.001-1} = 1000$ converges

but $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^{0.999}}$ is divergent integral.

Integrands with vertical Asymptotes

هو نوع آخر من التكاملات المعتلة يكون فيه مدى الدالة لانهائي ويحدث
عندما يكون هناك خط تقارب رأسي عند نقطة عدم اتصال لانهائية
(infinite discont.) تكون على حدود الفترة أو على نقطة داخلية في الفترة.



يتم التعامل مع هذا النوع من التكاملات بتحويله إلى نهاية كما حدث من النوع
الأول كما يلي :

DEFINITION Integrals of functions that become infinite at a point within the interval of integration are **improper integrals of Type II**.

1. If $f(x)$ is continuous on $(a, b]$ and discontinuous at a, then

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\,dx.$$

2. If $f(x)$ is continuous on $[a, b)$ and discontinuous at b, then

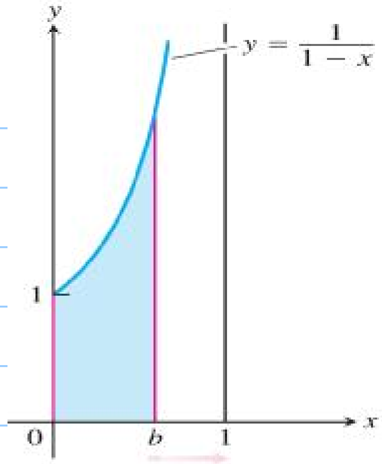
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,dx.$$

3. If $f(x)$ is discontinuous at c, where $a < c < b$, and continuous on $[a, c) \cup (c, b]$, then

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

In each case, if the limit is finite we say the improper integral **converges** and that the limit is the **value** of the improper integral. If the limit does not exist, the integral **diverges**.

Examples: 1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1-x}$



sol: لاحظ أنه للدالة $y = \frac{1}{1-x}$ نقطة
عدم اتصال لانهائية عند $x = 1$ ،

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x} = \lim_{b \to 1^-} \int_0^b \frac{dx}{1-x} = \lim_{b \to 1^-} \Big[-\ln|1-x|\Big]_0^b$$

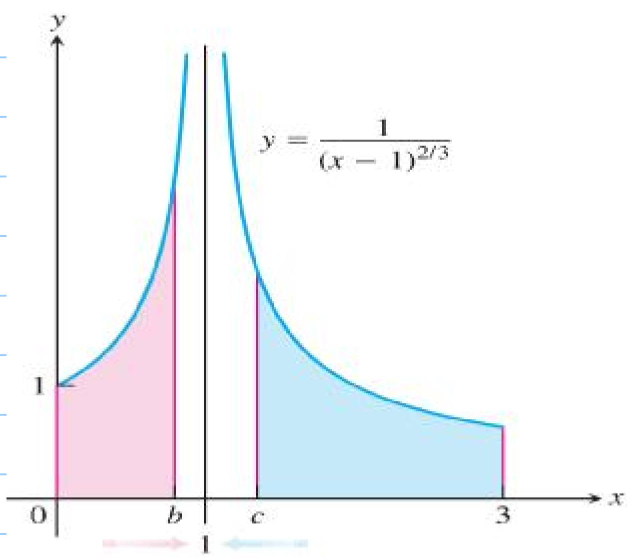
$$= \lim_{b \to 1^-} \Big[-\ln|1-b|\Big] = -(-\infty) = \infty$$

div.

2) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$

sol: لاحظ أنه للدالة $y = \frac{1}{(x-1)^{2/3}}$ infinit discont. عند $x=1$

$$\therefore \int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$



$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{b \to 1^-} \int_0^b \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{b \to 1^-} \left[3(x-1)^{\frac{1}{3}} \right]_0^b$$

$$= \lim_{b \to 1^-} \left[3(b-1)^{\frac{1}{3}} + 3 \right] = 3 \quad , \quad \text{and}$$

$$\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{c \to 1^+} \int_c^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{c \to 1^+} \left[3(x-1)^{\frac{1}{3}} \right]_c^3$$

$$= \lim_{c \to 1^+} 3 \left[\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{c-1} \right] = 3\sqrt[3]{2}$$

$$\therefore \int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \boxed{3 + 3\sqrt[3]{2}}$$

Tests for Convergence and Divergence:

عندما لا نستطيع حساب التكامل (المعتل مباشرةً) فإنه قد يكون من المفيد محاولة
اختبار ما إذا كان التكامل تقاربياً أم تباعدياً، فإذا كان تباعدياً فإن هذه
تكون نهاية المطاف، أما إذا كان تقاربياً، فإنه بالإمكان استخدام طرق
التحليل العددي لتقريب قيمته والتعامل معه. الإختبارات الأساسية
لفحص التقارب هما اختبار المقارنة المباشر (Direct Comparison test)
واختبار مقارنة النهاية (Limit Comparison test).

Illustration: The improper integral

$$\int_1^\infty e^{-x^2}\, dx$$

can not be evaluated directly, but for $x \geq 1$

Note that $x \leq x^2 \Rightarrow -x \geq -x^2$ and since e^x is $\nearrow$ fun, we get $e^{-x^2} \leq e^{-x} \quad \forall\, x \geq 1 \Rightarrow$

$$\int_1^\infty e^{-x^2}\, dx \leq \int_1^\infty e^{-x}\, dx \simeq 0.368.$$

نلاحظ في التوضيح السابق أنه من خلال المقارنة يمكن استنتاج أن التكامل المعتل $\int_1^{\infty} e^{-x^2}dx$ هو تكامل تقاربي رغم موجب لا نعلم قيمته ولكن نعلم أنه أقل من 0.368.

Thrm: (Direct Comparison test)

Let $f(x)$ and $g(x)$ be continuous on $[a,\infty)$ with $0 \le f(x) \le g(x)$ $\forall\ x \ge a$.

1) If $\int_a^{\infty} g(x)$ converges, then $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ converges.

2) If $\int_a^{\infty} f(x)$ diverges, then $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ diverges.

Examples: Test the Convergence:

1) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$

Sol: We know that $0 \le \sin^2 x \le 1$, so we have that $0 \le \dfrac{\sin^2 x}{x^2} \le \dfrac{1}{x^2}$.

But by p-test, we have that the improper integral $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ converges, So by DCT, the improper integral $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ is Convergent.

2) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-0.1}}$

Sol: For $x \ge 1$, $x^2 - 0.1 < x^2$, so

$$\sqrt{x^2-0.1} < \sqrt{x^2} = |x| = x$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\sqrt{x^2-0.1}} > \frac{1}{x}$$

Since $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ diverges (p-test),

then by DCT, $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2-0.1}}$ diverges also.

3) $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-0.1}}$

Sol: For $x > 1$, $x^2 - 0.1 > x^2 - \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}$

so $\sqrt{x^2-0.1} > \sqrt{\frac{x^2}{2}} = \frac{|x|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} x$

Thus, $x\sqrt{x^2-0.1} > \frac{1}{\sqrt{2}} x^2 \qquad (x > 1 > 0)$

$\therefore \frac{1}{x\sqrt{x^2-0.1}} < \frac{\sqrt{2}}{x^2}$

By p-test, $\int_1^\infty \frac{\sqrt{2}}{x^2}\, dx$ converges $(p=2>1)$

then by DCT, $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-0.1}}$ converges.

THEOREM 3—Limit Comparison Test If the positive functions f and g are continuous on $[a, \infty)$, and if

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L, \qquad 0 < L < \infty,$$

then

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \qquad \text{and} \qquad \int_a^\infty g(x)\,dx$$

both converge or both diverge.

ملحوظات هامة: ١- في حال تم تطبيق نظرية LCT /
وعندما تكون كلا الدالتين f و g متقاربتين ، فإن هذا

لا يعني أنهما متقاربتان لنفس القيمة.

2- لاحظ أن شرط التقارب $0 < L < \infty$ حيث $\lim_{x\to\infty} \frac{f}{g} = L$ يعني أن f و g تنموان بنفس المعدل.

3- بالرجوع لاختبار المقارنة المباشر، فإنه يمكن تطبيق النظرية عند الحاجة حتى على فترات $[a,b]$ محدودة عندما يكون التكامل معتلاً في نقطة عدم اتصال لانهائي وبالتالي ليس شرطاً أن تكون حدود التكامل على الفترة $[a,\infty)$ بينما في LCT، وحسب مفهوم الملاحظة (2)، فإن شرط مقارنة النمو يلزمه فترة من $[a,\infty)$ وبالتالي فإننا لا نستطيع تطبيق LCT إلا على نوع واحد من الإعتلال وهو النوع الأول على الفترة $[a,\infty)$.

Examples: Test for Convergence:

1) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-0.1}}$

Sol: لاحظ أن هذا المثال تم حله باستخدام DCT.
سنحاول هنا حله باستخدام LCT.

Let $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-0.1}}$ and $g(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2}} = \frac{1}{x^2}$, and by p-test, $\int_1^\infty g(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ conv. $(p=2)$.

Now Consider $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x\sqrt{x^2-0.1}} = 1$

So by LCT

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-0.1}} \quad \text{converges.}$$

2) $\int_1^\infty \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx$

sol: Let $f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x}$ and $g(x) = \frac{1}{x}$

Note that $\frac{1-e^{-x}}{x} < \frac{1}{x}$, and $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ div.

So we can't use the DCT. But Note that

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right)\cdot x = 1$$

So by LCT, $\int_1^\infty \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx$ is divergent.

b	$\int_1^b \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx$
2	0.5226637569
5	1.3912002736
10	2.0832053156
100	4.3857862516
1000	6.6883713446
10000	8.9909564376
100000	11.2935415306

لاحظ أنه $\int_1^\infty \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx$ ،

ويمكن حساب $\int_1^b \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx$ عند بعض قيم $b>0$

ملاحظة كيفية تباعد القيم . (انظر الجدول)

3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t-\sin t}$ (تكامل معتل من النوع الثاني عند $x=0$)

Sol: نلاحظ من البداية أنه حدود التكامل محدودة ، وبالتالي لا نستطيع استخدام المقارنة LCT ، بالإضافة لكون التكامل المباشر صعب و عليه ، لا يتبقى لنا إلا استخدام DCT .

تذكر أنه $\sin t > 0$ عندما $t \in (0,1]$ ، لذا

$$t - \sin t < t$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{t-\sin t} > \frac{1}{t}$$

Consider $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t} = \lim_{b\to 0^+} \int_b^1 \frac{1}{t}$ (not p-test)

$$= \lim_{b\to 0^+} \ln|t| \Big]_b^1 = \lim_{b\to 0^+} -\ln|b| = \infty$$

so by DCT, $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t-\sin t}$ is divergent.

4) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^6}}$

Sol: يمكن حل السؤال بالطريقتين ، ولكن متى يكون اختبار النهاية (LCT) أسهل .

Take $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^6}} = \dfrac{1}{x^2}$ and note that

$\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ converges by p-test

Consider $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{\sqrt{1+x^6}} = 1$

so by LCT, $\int_1^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^6}}$ converges.

but $$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^6}} = \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^6}} + \int_1^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^6}}$$

تكامل عادي لا مشكلة معه

تكامل معتل تقاربي

so $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^6}}$ is convergent integral.

لاحظ من البداية أننا لم نفحص $\int_0^\infty \frac{1}{x}\,dx$ لأنه يوجد نقطة إعتلال
عند $x=0$ بينما هذه النقطة ليست نقطة إعتلال في التكامل الأصلي.

5) $$\int_\pi^\infty \frac{2+\cos x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

sol: $\cos x > -1 \Rightarrow 2+\cos x > 2-1 = 1 \quad \cdots (1)$

and $x^2+1 < x^2+x^2 = 2x^2$ for $x \geq \pi$.

so $\sqrt{x^2+1} < \sqrt{2}\,x$ on $[\pi, \infty)$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > \frac{1}{\sqrt{2}\,x} \quad \text{------} \quad (2)$$

$$(1) \text{ and } (2) \Longrightarrow \frac{2+\cos x}{\sqrt{x^2+1}} > \frac{1}{\sqrt{2}\,x}$$

Since $\int_\pi^\infty \frac{dx}{\sqrt{2}\,x}$ is divergent so by DCT

$\int_\pi^\infty \frac{2+\cos x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ is divergent.

ملحوظ

Test the convergent of the following:

1) $$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{e^x - x}}$$

<u>Sol:</u> واضح أن الحسابات المباشرة لهذا التكامل صعبة

نلاحظ أن الانطباع الأولي للتكامل هو أنه تكامل تقاربي

أكبر بكثير

بسبب أن $e^x \gg x$ عندما $x \gg 1$

حل ١

By DCT, $x < \frac{1}{2}e^x$ for $x > 1$

so $-x > -\frac{1}{2}e^x \Rightarrow e^x - x > e^x - \frac{1}{2}e^x = \frac{e^x}{2}$

$$\Rightarrow \sqrt{e^x - x} > \sqrt{\frac{e^x}{2}} = \frac{e^{x/2}}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{e^x - x}} < \frac{\sqrt{2}}{e^{x/2}}$$

Consider $$\int_1^\infty \frac{\sqrt{2}}{e^{x/2}}\,dx = \lim_{b\to\infty} \sqrt{2}\int_1^b e^{-x/2}\,dx$$

$$= \sqrt{2}\lim_{b\to\infty} -2e^{-x/2}\Big]_1^b = \sqrt{2}\lim_{b\to\infty} -2\left[e^{-b/2} - e^{-1/2}\right] = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{e}}$$

so by DCT, $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{e^x - x}}$ converges.

2(f) Take $g(x) = e^{-x/2}$, so $\int_1^\infty e^{-x/2}\,dx$ conv.

and $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x/2}}{\sqrt{e^x - x}} = 1$

so by LCT, $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{e^x - x}}\,dx$ is convergent.

2) $\int_2^\infty \frac{\ln x - 1}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$

sol: We will use the fact that

" $\ln x < x^r \quad \forall\, r > 0$ "

For our question,

$\ln x < x^{1/4} \Rightarrow \ln x - 1 < x^{1/4} - 1 < x^{1/4}$

and $x^3 + 1 > x^3 \Rightarrow \sqrt{x^3+1} > x^{3/2}$

So $\frac{1}{\sqrt{x^3+1}} < \frac{1}{x^{3/2}}$

$\therefore \frac{\ln x - 1}{\sqrt{x^3+1}} < \frac{x^{1/4}}{x^{3/2}} = \frac{1}{x^{5/4}}$

Since $\int_2^\infty \frac{dx}{x^{5/4}}$ converges then by DCT

$\int_2^\infty \frac{\ln x - 1}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$ converges.

3) $$\int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{t} + \sin t}$$ (تكامل معتل في النقطة 0 لذا نطبق نظرية DCT)

<u>sol:</u> on the interval $[0, \pi]$, $0 \le \sin t$, so we have that $\sqrt{t} \le \sqrt{t} + \sin t$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{t}} \ge \frac{1}{\sqrt{t} + \sin t}$$

consider $\int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{t}}$.

هو تكامل معتل في النقطة 0 كما أنه ليس p-integral

$$\int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \lim_{b \to 0^+} \int_b^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \lim_{b \to 0^+} 2\sqrt{t}\Big]_b^{\pi}$$

$$= \lim_{b \to 0^+} 2\sqrt{\pi} - 2\sqrt{b} = 2\sqrt{\pi} \quad \text{conv.}$$

so by DCT, $\int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{t} + \sin t}$ is convergent.

4) $$\int_2^{\infty} \frac{2\,dt}{t^{2/3} - 1}$$ (improper integ. of type I)

<u>sol:</u> Take $f(t) = \frac{2}{t^{2/3} - 1}$ and $g(t) = \frac{1}{t^{2/3}}$

consider $\int_2^{\infty} g(t)\,dt = \int_2^{\infty} \frac{dt}{t^{2/3}}$ diverges (p-test, $p = \frac{2}{3} < 1$)

$$\lim_{t \to \infty} \frac{f}{g} = \lim_{t \to \infty} \frac{2t^{2/3}}{t^{2/3} - 1} = 2$$

so by LCT, the improper integral $\int_2^{\infty} \frac{dt}{t^{2/3} - 1}$ is divergent