تلخيص شابتر 3
ماث أولى

نزى معطان

Chapter 3 Section 3.1

⊛ Matrices:- المصفوفات

↳ is a rectangular array of numbers.

Ex $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 3 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 2 & y \\ x & 0 \end{bmatrix}$

$C=\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ $D=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $E=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$F=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

⊛ The size (order) of a metrices is defind by the number of rows X number of columns.

حجم المصفوفة = عدد الصفوف x عدد الأعمدة

⊛ find the size of the previous metrices:-

A = 3x4

B = 2x2

C = 3x1

D = 1x3

E = 3x2

F = 3x3

* The numbers in the matrix are called the entries or elements.

a_{ij} = The element in raw(i), column(j) in matrix A

Ex Find a_{23} in the previous Ex ↓

$a_{23} = 2$

$a_{34} = 0$

Ex find i , find j

$a_{11} = 4$, $a_{3j} = 7$

يروح ع العمود الاول ويشوف 4 بأي صف بتكون قيمة i

$i = 2$

يروح ع الصف التالت ويشوف وين الـ 7 بأي عمود بتكون قيمة j

$j = 2$

* Special names:-

1 A matrix of the size nxn is called : square matrix

Such as:- B & F

المصفوفة اللي فيها اعداد الصفوف يساوي عدد الاعمدة تسمى مصفوفة مربعة, مثلاً B,F في المثال السابق

2 A matrix of the size mx1 is called column matrix

Such as : C

المصفوفة اللي فيها عمود واحد وعدد معين من الصفوف تسمى مصفوفة عمودية, مثلاً C في المثال السابق

[3] A matrix of a size 1xm is called row matrix as D

المصفوفة التي يكون فيها عدد الصفوف = 1 تسمى مصفوفة صف

[4] Column and row matrices are called vectors; such as D & C

مصفوفة العمود أو الصف ← مصفوفة متجه

[5] A matrix A where $a_{ij}=0$ for all (i) and (j) is called zero matrix. such as E

المصفوفة إذا كانت كل عناصرها الصفر يكون تسمى مصفوفة صفرية (وهي مصفوفة خاصة لعملية الجمع). نرمز لها بالرمز O

[6] A square matrix where all the elements of main diagonal are ones and the rest of the elements → Identity matrix such as: F

المصفوفة المربعة التي عناصر قطرها الرئيسي واحدات (رقم واحد) 1. وباقي العناصر أصفار تسمى مصفوفة الوحدة

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

القطر الرئيسي ← diagonal الثنائي
نرمز لهذه المصفوفة بالرمز I

[7] Two matrices A & B are equal if $a_{ij}=b_{ij}$ for all (i) and (j).

Ex If A=B & $A=\begin{bmatrix} x & 3 \\ 7 & y-3 \end{bmatrix}$ & $B=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$

find x & y

$x=4$

$y-3=10$

$+3 \quad +3$

$y=13$

[8] The transpose of A denoted by A^T is a matrix whose columns are the rows of A

المصفوفة المنقولة يعني اني ابدل الصفوف مع الاعمدة transpose

Ex If $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 7 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ Find A^T

بتاخذ العمود تصير صف أو الصف تصير عمود (نفس الاشي)

$$A^T=\begin{bmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Note $\Rightarrow (A^t)^t = A$

[9] The negative of a matrix A is $-A$ whose elements are the negative elements of A

Ex If $A=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & -10 \end{bmatrix}$ then $-A=\begin{bmatrix} -1 & -5 & -3 \\ 2 & 0 & 10 \end{bmatrix}$

⊛ Adding or subtracting matrices of the same size :-

Ex If $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 10 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$

Find : [1] $A+B = \begin{bmatrix} 2+3 & 1+2 & 5+-5 \\ -2+4 & 0+2 & 10+1 \end{bmatrix}$

$A+B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 11 \end{bmatrix}$

[2] $A-B = \begin{bmatrix} 2-3 & 1-2 & 5--5 \\ -2-4 & 0-2 & 10-1 \end{bmatrix}$

$A-B = A+(-B)$

$A-B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 10 \\ -6 & -2 & 9 \end{bmatrix}$

[3] $A+C$ → Impossible the order of A is 2×3
the order of C is 2×2.

[4] $-2A = -2\begin{bmatrix} 2 & 1.5 \\ -2 & 0 \\ 10 & \end{bmatrix}$

$$-2A = \begin{bmatrix} -4 & -2 & -10 \\ 4 & 0 & -20 \end{bmatrix}$$

(*) حل الاولى لاين :-

② $E_{2\times4}$

[4] $\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$

[6] $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

[7] All of them except B, E

[9] $a_{23} = 1$

[11] $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

13 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

14 $a_{3j} = 0 \Rightarrow j = 2$

15 $\begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

22 impossible / undefined

27 impossible / undefined.

31 $x = 4 \quad z = 3$
$y = 1 \quad w = 3$

34 $x = -4 \quad z = -2$
$y = 0 \quad w = 2$.

Section 3.2

⊛ Multiplication of Matrices . ضرب المصفوفات

⇒ If the size of A is $m \times n$ and the size of B is $n \times p$, then the product of A and B is $AB = C$ where the size of C is $m \times p$

شرط ضرب المصفوفات : $A_{m \times n} \; B_{n \times p} = C_{m \times p}$

⇒ $A_{2\times 3} \cdot B_{3\times 5} = C_{2\times 5}$ ... 1

$B_{3\times 5} \cdot A_{2\times 3}$ = impossibal

$\neq$

⇒ $A_{m\times 4} \cdot B_{4\times 5} = C_{3\times 5}$ ⇒ $m = 3$

Ex If $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Find :-

[1] $AB = \begin{bmatrix} 5+15 & 0+3 & 20+0 \\ 1+10 & 0+2 & 4+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 3 & 20 \\ 11 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

[2] Find BA

↳ Impossible $B_{2\times3}\ A_{2\times2}$

$2 \neq 3$ ≠

[3] $OA = O$

$OA = O$

↳ $OA = AO = O$

رمز المصفوفة الصفرية ⇐ O

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

رقم 0 ← zero

[4] $AI =$

↳ $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$AI = IA = A$

I ⇐ مصفوفة الوحدة

أي مصفوفة ضرب بنفسها

المصفوفة ج تساوي المصفوفة نفسها

لأنه I مصفوفة خاصة لعملية الضرب

[5] $AC = A_{2\times2}\ C_{3\times1}$ ⇒ Impossible.

$2 \neq 3$ ≠

[6] $C_{3\times1}\ D_{1\times3} =$

$=$

3×3

[7] $\underset{1\times3}{D}\,\underset{3\times1}{C} = [0+0-6] = [-6]$

1×1 $\quad 1\times1$

لاحظ الضرب بالمصفوفات غير تبديلي

[8] $A_{2\times2}(B_{2\times3}C_{3\times1}) = [\quad]_{2\times1}$ $\quad (2\times3)$

[9] $(AB_{2\times2\ \ 2\times3})C_{3\times1} = [\quad]_{2\times1}$ $\quad (2\times3)$

[10] $A(BC) = (AB)C$

(*) حل الاوت لاين :-

[13] $EA^T = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 16 \\ 5 & 17 & 20 \end{bmatrix}$

[28] $AZ = Z$

[29] $AI = A$

[30] $IA = A$

[11] {32}

[5] $\begin{bmatrix} 10 & 2 & 16 \\ 28 & 5 & 12 \end{bmatrix}$

[9] Impossible

Section 3.4

⊛ Inverse of a Square Matrix

Definition: Determinant of a 2X2 matrices.

$$\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$ad - bc$ = محددة المصفوفة

Ex Find $\det\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = (2 \cdot -4) - (3 \cdot 4)$$

$$= -20$$

⊛ **Definition:** Two square matrices (A & B) are called inverses of each other if $AB = I$ and $BA = I$

In this case, $B = A^{-1}$ and $A = B^{-1}$

A & B مصفوفتين مربعتين، A تسمى النظير لـ B إذا كان $AB = I$ و $BA = I$ (مصفوفة الوحدة).

في هذه الحالة يكون A هي النظير لـ B و B هي النظير لـ A

(*) Definition :- The inverse of a 2x2 matrix

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ is $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

provide that $ad - bc \neq 0$

If $det(A) = ad-bc = 0$, then A^{-1} doesn't exist.

عشان اوجد نظير A لازم اول اشي اوجد المحددة
وبعدها اطلع $\frac{1}{|A|}$ وبضربه بالمصفوفة بس لازم اعمل اشياء

بالمصفوفة بالاول ← حط d محل a و حط a محل d
وعكس اشارة b و c

Ex Find A^{-1} for this matrix

$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$

$|A| = (2 \cdot 4) - (8 \cdot 6) = -40$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -8 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{-40} & \frac{-6}{-40} \\ \frac{-8}{-40} & \frac{2}{-40} \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{20} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{20} \end{bmatrix}$

Ex Use the matrix equation (Inverse matrix) to solve the following system of equations :-

(1) $\begin{cases} x+y=5 \\ -2x+y=-4 \end{cases}$

اول اشتي برتب المعاملات في داخل مصفوفات كما يلي وبعدها بوجب نظير A وبضربو في B عشان اوجد قيمة المصفوفة داخل المصفوفة X

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot X = B$$

$$|A| = 3$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} + \frac{4}{3} \\ \frac{10}{3} + \frac{-4}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x=3 \\ y=2 \end{matrix}} \Rightarrow (3,2)$$

Ex ② $\begin{cases} x+2y=4 \\ 3x+4y=10 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot X = B$$

$|A| = -2$

$$A^{-1} \Rightarrow \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{-2} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{-2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x=2 \\ y=1 \end{matrix}} \Rightarrow (2,1)$$

Chapter 3 Done ^^

If you can dream it, you can do it... ♡

نادي معطان