Note Title ٢٣/٠١/١٠

Ch 5 Integration

5.1 Area and Estimating with Finit Sums

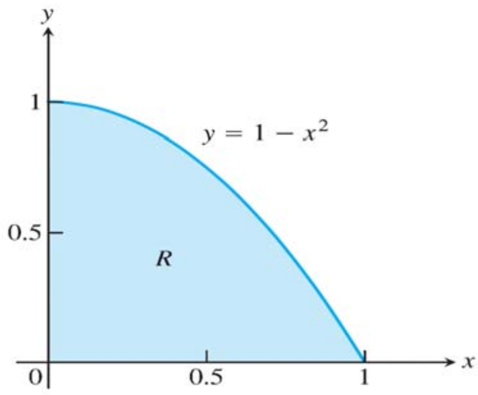
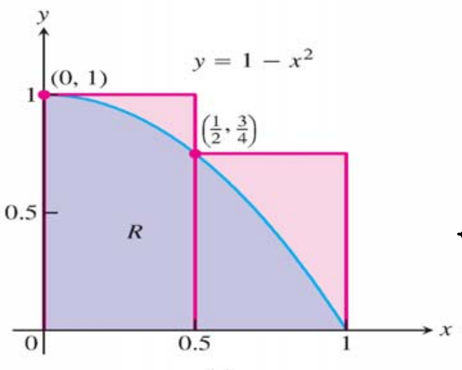
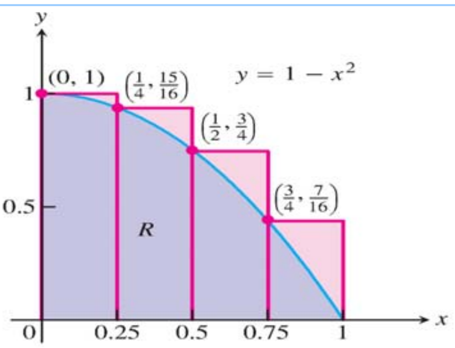


FIGURE 5.1 The area of the region R cannot be found by a simple formula.

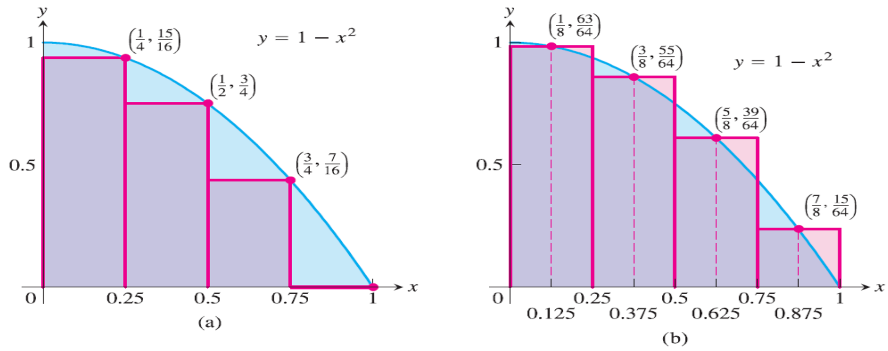
بشكل عام ليس من السهولة إيجاد المساحة R تحت المنحنيات بصيغ مباشرة



لإيجاد المساحة R نقوم بتقريبها باستخدام مستطيلات بتجزئة الفترة $[0,1]$.



وكلما زادت عدد المستطيلات من خلال زيادة التجزئة على $[0,1]$ كلما كان التقريب أفضل.

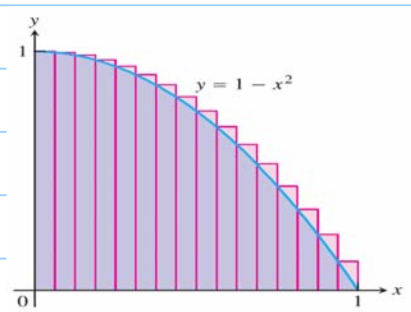


والحقيقة أنه يوجد أنواع من تقريب المساحة R بالمستطيلات

منها المجموع الأعلى للمستطيلات U (Upper Sum) وهو المجموع الذي بدأنا به الشرح.

ومنها أيضاً المجموع الأدنى للمستطيلات L (Lower Sum) والموضح بالرسمة الأخيرة (a) / ومنها أيضاً مجموع النقطة الوسطية (Midpoint Sum) والموضح بالرسمة الأخيرة (b)

بالتأكيد ومن خلال الرسم يتضح أن المساحة R هي رقم بين المجموع الأدنى للمستطيلات والمجموع الأعلى وبالتالي $R \in [L, U]$



كلما زاد عدد المستطيلات أكثر فأكثر من خلال زيادة التجزئة للفترة [a,b] كلما حدث التالي:

1. المجموع الأعلى للمربعات U يقل
2. المجموع الأدنى للمربعات L يزيد.
3. تبقى $L \le U$ ولكن الفترة [L,U] تصغر مما يجعل تقريب R أدق.

5.2 Sigma Notation and Limits of Finite Sums

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

The index k ends at $k = n$.

The summation symbol (Greek letter sigma)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

a_k is a formula for the kth term.

The index k starts at $k = 1$.

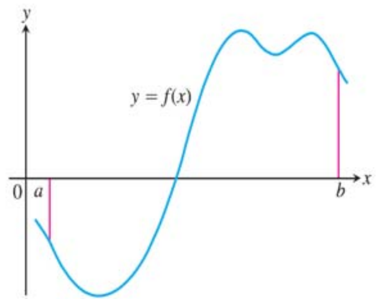
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 11^2 = \sum_{k=1}^{11} k^2,$$

Illustration

A sum in sigma notation	The sum written out, one term for each value of k	The value of the sum
$\sum_{k=1}^{5} k$	$1 + 2 + 3 + 4 + 5$	15
$\sum_{k=1}^{3} (-1)^k k$	$(-1)^1(1) + (-1)^2(2) + (-1)^3(3)$	$-1 + 2 - 3 = -2$
$\sum_{k=1}^{2} \frac{k}{k+1}$	$\frac{1}{1+1} + \frac{2}{2+1}$	$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$
$\sum_{k=4}^{5} \frac{k^2}{k-1}$	$\frac{4^2}{4-1} + \frac{5^2}{5-1}$	$\frac{16}{3} + \frac{25}{4} = \frac{139}{12}$

Riemann Sums

افرض أنه لدينا الدالة $y = f(x)$ معرفة على الفترة $[a,b]$

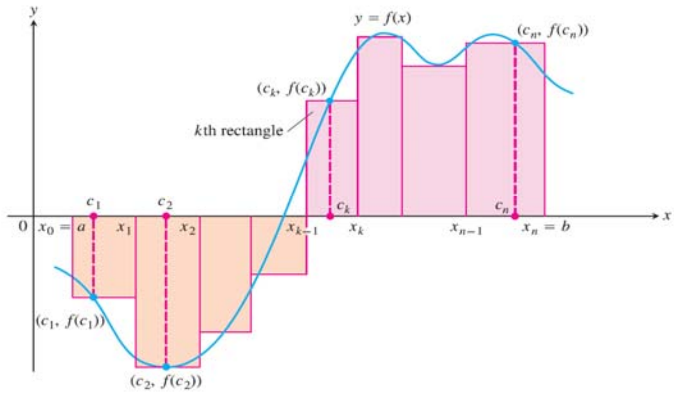


وكانت $P=\{x_0,\dots,x_n\}$ تجزئة للفترة $[a,b]$ كالتالي

$$a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$$

وتم اختيار c_k نقطة عشوائية من الفترة الجزئية $[x_{k-1},x_k]$

لتكوين المستطيل ومساحته فوق محور x هي $f(c_k)\Delta x_k$ وتحته $(-f(c_k)\Delta x_k)$ ، $k=1,2,\dots,n$



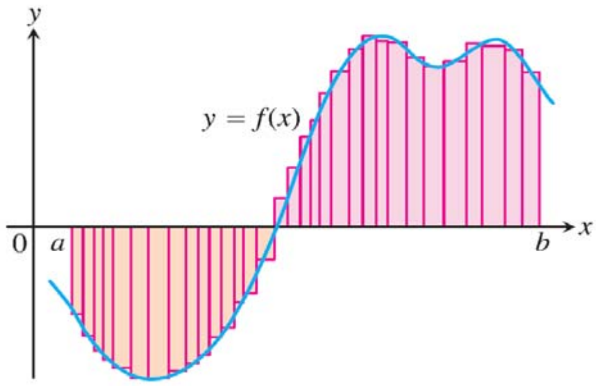
فإن مجموع هذه المستطيلات يسمى مجموع ريمان ويرمز له بالرمز S

لذلك

$$S=\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k$$

ملحوظات: ١- المجموع الأدنى للمستطيلات، والمجموع الأعلى والمجموع لنقطة المنتصف هي حالات خاصة من مجموع ريمان للدالة f على الفترة $[a,b]$.

٢- كلما زادت التجزئة كلما كانت مجاميع ريمان متقاربة القيمة وتساوي المساحة تحت المنحنى الموجب، وسالب المساحة فوق المنحنى السالب . انظر الرسم .


y
y = f(x)
0
a
b
x