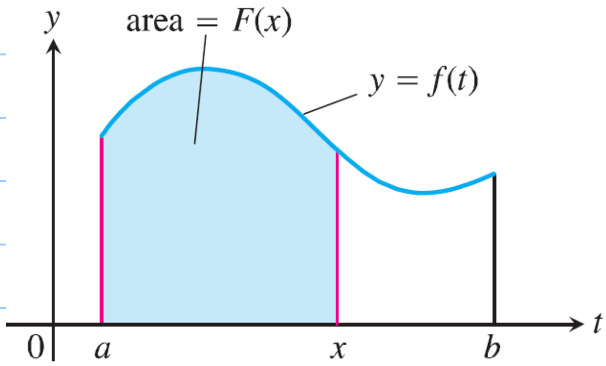
5.4 The Fundamental Thrm of Calculus

Note Title ٢٣/٠١/١٤

Fundamental Theorem, Part 1

If $f(t)$ is an integrable function over a finite interval I, then the integral from any fixed number $a \in I$ to another number $x \in I$ defines a new function F whose value at x is

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt. \tag{1}$$



THEOREM 4—The Fundamental Theorem of Calculus, Part 1 If f is continuous on $[a, b]$, then $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ is continuous on $[a, b]$ and differentiable on (a, b) and its derivative is $f(x)$:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x). \tag{2}$$

Corollaries:

1) $$\frac{d}{dx}\left(\int_a^{g(x)} f(t)\,dt\right) = f(g(x))\,g'(x)$$

2) $$\frac{d}{dx}\left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt\right) = f(g(x))\,g'(x) - f(h(x))\,h'(x)$$

ملحوظات : ١) لإثبات النتيجتين السابقتين ، نستخدم لذلك

النظرية السابقة مع قانون السلسلة وذلك

بكتابة التكامل $\int_a^{g(x)} f(t)\,dt$ في (1) بالصورة

$$\int_a^{u} f(t)\,dt \quad , \quad u = g(x)$$

وفي (2) بالصورة

$$\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt = \int_a^{g(x)} f(t)\,dt - \int_a^{h(x)} f(t)\,dt$$

(2) صورة التكامل في النتيجة (2) يشمل الصورتين الأخريين.

Examples: Find y' if

$$y = \int_x^5 \left(3+\sqrt{t}\right)^3 dt$$

sol: لأن القانون الأخير هو قانون أشمل ويمكن تطبيقه مع جميع الحالات / لذلك سوف نستخدمه في الحل (مع الأخذ بعين الاعتبار إمكانية الحل بطريقة مختلفة).

$$y' = \left(3+\sqrt{5}\right)^3 \cdot \cancel{\frac{d}{dx}(5)}^{\,0} - \left(3+\sqrt{x}\right)^3 \cdot \cancel{\frac{d}{dx} \cdot x}^{\,1} = -\left(3+\sqrt{x}\right)^3 .$$

2) $$y = \int_2^{\tan x} \frac{dt}{1+t^2}$$

sol:

$$y' = \frac{1}{1+\tan^2 x} \cdot \sec^2 x = \frac{\sec^2 x}{\sec^2 x} = 1$$

(لاحظ أنه إذا كان أحد حدود التكامل ثابت فإن مشتقته تساوي صفر ولا داعي لتعويضه)

3) $$y = \int_{\sqrt{x}}^{x^3} \sqrt{t}\,\sin t\,dt$$

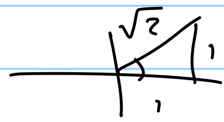
$$y' = \sqrt{x^3} \cdot \sin x^3 \cdot 3x^2 - \sqrt{\sqrt{x}}\,\sin\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} .$$

4) If $f(x) = \int_1^{\tan x} \sqrt{1+t^2}\, dt$, then find $f(\pi/4)$ and $f'(\pi/4)$.

Sol: $f(\frac{\pi}{4}) = \int_1^{\tan \frac{\pi}{4}} \sqrt{1+t^2}\, dt = \int_1^1 \sqrt{1+t^2}\, dt = \boxed{0}$, and

$$f'(x) = \sqrt{1+\tan^2 x} \cdot \sec^2 x = |\sec x| \cdot \sec^2 x .$$

$$\therefore f'(\tfrac{\pi}{4}) = |\sqrt{2}| \cdot 2 = \boxed{2\sqrt{2}}$$



5) Find the fun $f(x)$ and the constant a if

$$2\int_a^x f(t)\,dt = 2\sin x - 1 \quad \text{and} \quad 0 \le a \le \pi/2 .$$

Sol: لايجاد الدالة يمكن اشتقاق الطرفين لنحصل على

$$2 f(x) = 2\cos x \implies \boxed{f(x) = \cos x}$$

لايجاد a / هناك عدة طرق لذلك / حيث يمكن اجراء تكامل للطرف الأيسر اذا كان سهلاً

ومساواته بالطرف الأيمن / وللسهولة عوض عن قيمة x ب a في الطرفين نحصل على

$$2 \overset{0}{\cancel{\int_a^a f(t)\,dt}} = 2\sin a - 1 \implies 2\sin a - 1 = 0$$

$$\implies \sin a = \tfrac{1}{2} \implies \boxed{a = \pi/6}$$

DEFINITION A function F is an **antiderivative** of f on an interval I if $F'(x) = f(x)$ for all x in I.

Example: Find an antiderivative of $f(x) = 2x$ on $\mathbb{R}$.

Sol: لاحظ أننا هنا بحاجة للتفكير بشكل عكسي ، فما هي الدالة $F(x)$

التي اشتقاقها يساوي $f(x) = 2x$.

من خلال معرفتنا السابقة / معلوم أن $\frac{dx^2}{dx} = 2x$ لذلك يمكن أخذ

$$F(x) = x^2$$

لاحظ أنه باستخدام نتائج نظرية MVT / عكسه ؛ نجد $F(x)=x^2+c$ حيث c
هو ثابت ، كما توضح النظرية التالية :

THEOREM 6 If F is an antiderivative of f on an interval I, then the most general antiderivative of f on I is

$$F(x) + C$$

where C is an arbitrary constant.

EXAMPLE 2 Find an antiderivative of $f(x) = 3x^2$ that satisfies $F(1) = -1$.

Sol: since $\frac{d x^3}{dx} = 3x^2$, we get the general antiderivative

$$F(x) = x^3 + C$$

since $F(1) = -1 \Longrightarrow 1^3 + C = -1 \Longrightarrow C = -2$ and

$$F(x) = x^3 - 2$$

[يسمى هذا النوع من المسائل بـ "initial value problems".]

THEOREM 4 (Continued)—The Fundamental Theorem of Calculus, Part 2 If f is continuous at every point in $[a, b]$ and F is any antiderivative of f on $[a, b]$, then

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Examples: Evaluate the following integrals

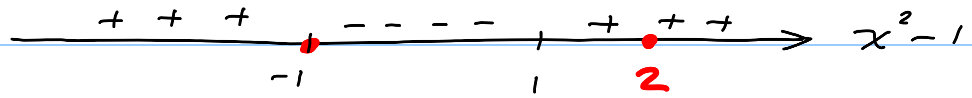
1) $\int_{-1}^{1} 1 + 2x\,dx = x + x^2 \Big]_{-1}^{1} = (1 + 1^2) - (-1 + (-1)^2) = \boxed{2}$

2) $\int_0^{\pi} \cos x\,dx = \sin x \Big]_0^{\pi} = \sin \pi - \sin 0 = 0 - 0 = 0$

3) $\int_{-\pi/4}^{0} \sec x \tan x\,dx = \sec x \Big]_{-\pi/4}^{0} = \sec 0 - \sec(-\pi/4) = \boxed{1 - \sqrt{2}}$

4) $\int_{-1}^{2} |x^2 - 1| + 2x\,dx$

لاحظ أن $x^2-1=0$ عندما $x=\mp 1$



وبالتالي فإنه على فترة التكامل

$$|x^2-1| = \begin{cases} 1-x^2 & \text{on } [-1,1] \\ x^2-1 & \text{on } [1,2] \end{cases}$$

وعليه

$$\int_{-1}^{2} |x^2-1| + 2x\,dx = \int_{-1}^{1} 1-x^2+2x\,dx + \int_{1}^{2} x^2-1+2x\,dx$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + x^2 \Big]_{-1}^{1} + \frac{x^3}{3} - x + x^2 \Big]_{1}^{2} = \frac{4}{3} - \frac{13}{3} = \boxed{\frac{-9}{3}}$$