# 5.6 Substitution and Area Between Curves



بداية انظر للمثال التالى

$$\int_0^1 \frac{2x\,dx}{(1+x^2)^2}$$

لحله يلزمنا فى البداية إيجاد التكامل اللامحدود وذلك لنستطيع تطبيق النظرية الأساسية فى التفاضل

$$\int \frac{2x\,dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{du}{u^2} \qquad u = 1 + x^2, \quad du = 2x\,dx$$

$$= \frac{-1}{u} + C = \frac{-1}{(1+x^2)} + C$$

ثم بعدها نأخذ الناتج للتعويض بحدود التكامل حسب نص النظرية الأساسية فى التفاضل ، وهنا نلاحظ أنه يصح أخذ الناتج مع الثابت c أو بدونه ، لذلك يفضل بدونه لنحصل على

$$\int_0^1 \frac{2x\,dx}{(1+x^2)^2} = \frac{-1}{1+x^2}\Bigg]_0^1 = \left(\frac{-1}{2}\right) - \left(-1\right) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

نلاحظ هنا أن التكامل المحدود فى النهاية رقم ، والطريقة السابقة طويلة فى حساباتها ، ويمكن اختصار الخطوات بالتعويض عن حدود التكامل حسب ما توضحه النظرية القادمة .

**THEOREM 7—Substitution in Definite Integrals** If $g'$ is continuous on the interval $[a, b]$ and $f$ is continuous on the range of $g(x) = u$, then

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

For the previous example,

$$\int_0^1 \frac{2x\,dx}{(1+x^2)^2} = \int_1^2 \frac{du}{u^2} \qquad u = 1 + x^2, \quad du = 2x\,dx$$

$$= -\frac{1}{u}\Bigg]_1^2 = \frac{-1}{2} + 1 = \boxed{\frac{1}{2}} \qquad x = 0 \longrightarrow u = 1, \quad x = 1 \longrightarrow u = 2$$

**Examples:** 1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

$$u = 1 + \sqrt{x}$$
$$du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$
$$2\,du = \frac{dx}{\sqrt{x}}$$
$$\text{at } x = 0 \longrightarrow u = 1$$
$$\text{at } x = 1 \longrightarrow u = 2$$

$$= 2\int_1^2 \sqrt{u}\,du = 2\left(\tfrac{2}{3}u^{3/2}\right]_1^2$$
$$= \tfrac{4}{3}\left[2^{3/2} - 1^{3/2}\right]$$
$$= \tfrac{4}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$$

2) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot\theta \csc^2\theta\,d\theta$

$$u = \cot\theta$$
$$du = -\csc^2\theta\,d\theta$$
$$-du = \csc^2\theta\,d\theta$$
$$\text{at } \theta = \pi/4 \longrightarrow u = 1$$
$$\text{at } \theta = \pi/2 \longrightarrow u = 0$$

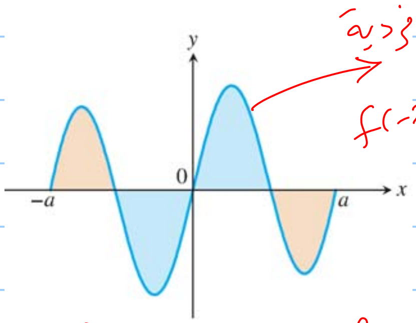
$$= -\int_1^0 u\,du = -\left.\frac{u^2}{2}\right]_1^0$$
$$= -\tfrac{1}{2}\left[0 - 1\right] = \boxed{\tfrac{1}{2}}$$

**ملحوظة:** في عملية التعويض البسيط ، يمكن أن يكون هناك أكثر من خيار مناسب لـ $u$ ، وبالتالي يمكن حل السؤال بأكثر من طريقة ، ففي المثال السابق ، لاحظ ما يلي:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot\theta \csc^2\theta\,d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \csc\theta \cdot \csc\theta \cot\theta\,d\theta$$

وعليه يمكن اختيار $u = \csc\theta$ لنحصل على $du = -\csc\theta \cot\theta$
وإكمال حل السؤال لنحصل على نفس النتيجة $\tfrac{1}{2}$ (Do it).

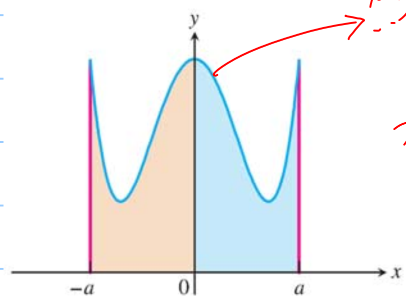
# Definite Integrals of Symmetric funs



دالة فردية

$f(-x) = -f(x)$

تماثل حول نقطة الأصل .



دالة زوجية

$f(-x) = f(x)$

تماثل حول محور y

**THEOREM 8** Let $f$ be continuous on the symmetric interval $[-a, a]$.

**(a)** If $f$ is even, then $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$.

**(b)** If $f$ is odd, then $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

البرهان في كلا الحالتين يتم من خلال تجزئة التكامل $\int_{-a}^{a} f\,dx = \int_{-a}^{0} f\,dx + \int_{0}^{a} f\,dx$

**Examples: 1)** Evaluate $\int_{-2}^{2} (x^4 - 4x^2 + 6)\,dx$.

Sol: لاحظ من البداية أن الدالة $f(x) = x^4 - 4x^2 + 6$ هي دالة زوجية

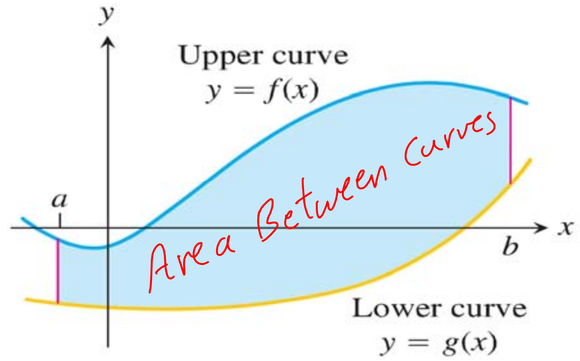
لأن $f(-x) = f(x)$ وعليه

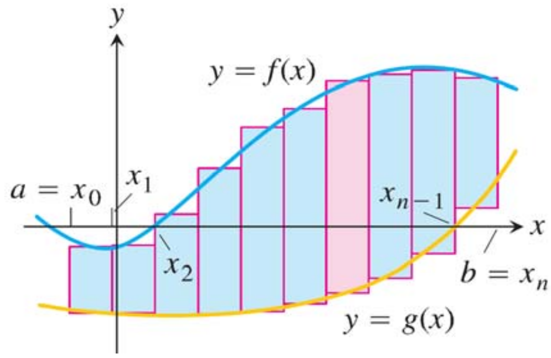
$$\int_{-2}^{2} x^4 - 4x^2 + 6\,dx = 2\int_{0}^{2} x^4 - 4x^2 + 6\,dx = 2\left(\frac{x^5}{5} - \frac{4}{3}x^3 + 6x\right]_0^2$$

$$= 2\left(\frac{2^5}{5} - \frac{4}{3}2^3 + 12\right) - 0 = \frac{232}{15}$$

2) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin x \, dx = 0$ ($y = \sin x$ is odd fun)

# Area Between Curves




لإيجاد المساحة بين المنحنيين يمكن إيجاد مجموع ريمان وأخذ النهاية له وبالتالي
نستطيع تعريف المساحة بين المنحنيين بالتكامل.

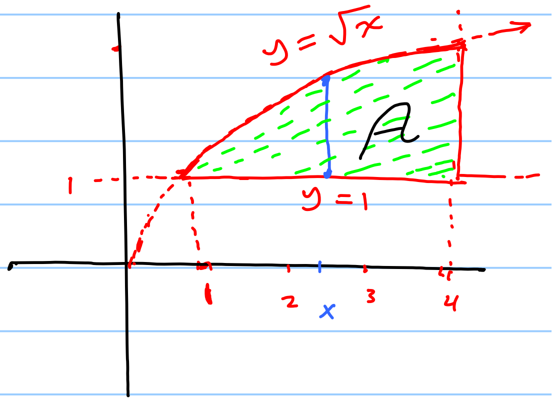
**DEFINITION** If $f$ and $g$ are continuous with $f(x) \geq g(x)$ throughout $[a, b]$, then the **area of the region between the curves $y = f(x)$ and $y = g(x)$ from $a$ to $b$** is the integral of $(f - g)$ from $a$ to $b$:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx.$$

**Examples:**

1) Find the area of the region bounded by the curves $y = \sqrt{x}$, $y = 1$, and $x = 4$.

**Sol:** بداية / لإيجاد حدود التكامل / نقوم بإيجاد نقطة التقاطع بين المنحنيين $y=\sqrt{x}$ / $y=1$



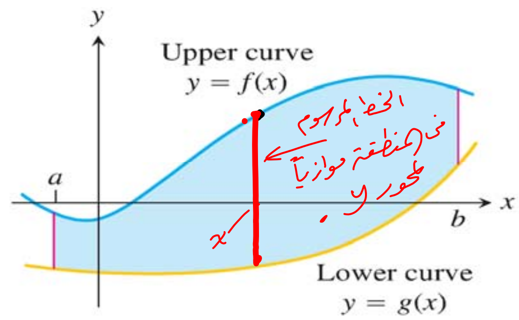

$\sqrt{x}=1 \Rightarrow x=1$

وبالتالي فإن المساحة A تساوي

$$A=\int_1^4 \sqrt{x}-1\,dx$$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x\Big]_1^4=\left(\frac{2}{3}\cdot 8-4\right)-\left(\frac{2}{3}-1\right)=\frac{5}{3}.$$

# خطوات إيجاد المساحة




1- رسم المنحنيات لتحديد المنطقة المطلوب إيجاد مساحتها وحدودها وتحديد المنحنى الأكبر والمنحنى الأصغر.

2- رسم خط في داخل المنطقة موازياً لمحور y (في حالات معينة / قد يكون الأنسب أن يكون موازياً لمحور x).

3- كتابة المعادلات بالصورة المناسبة كما يلي:

أ- إذا كان الخط المرسوم موازياً لمحور y نقوم بكتابة معادلات المنحنيات بالصورة $y=f(x)$ / $y=g(x)$ / ... إلخ.

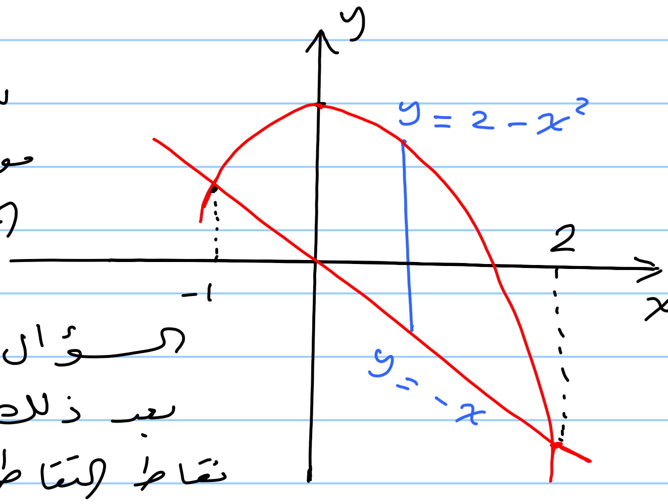
ب- إذا كان موازياً لمحور x فيجب كتابة المعادلات بالصورة المقابلة $x=h(y)$ / $x=k(y)$ / .. إلخ.

4- كتابة معادلة طول الخط $l(x)=f(x)-g(x)$ حيث $f(x)$ هو المنحنى الأكبر مع الأخذ بعين الاعتبار الحالة الثانية عندما يكون موازياً لمحور x.

5- المساحة المطلوبة هي تكامل طول الخط على حركته كما يلي:

$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx.$$

2) Find the area of the region enclosed by $y = 2 - x^2$ and $y = -x$.




**Sol:** بداية نرسم خطاً في داخل المنطقة موازياً لمحور y ، ونكتب المعادلات بالصورة المناسبة $y = 2 - x^2$ ، $y = -x$ [ لاحظ هنا أن الصورة المناسبة نفس الصورة المعطاة من السؤال دون تغيير ] .

بعد ذلك نقوم بإيجاد حدود التكامل ، وهي هنا نقاط التقاطع بين المنحنيين [ عادة تحدد مجال حركة الخط في المنطقة ]

$$2 - x^2 = -x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x+1)(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow x = -1, 2.$$

ثم نكتب معادلة طول الخط

$$l(x) = (2 - x^2) - (-x) = 2 - x^2 + x$$

أخيراً المساحة المطلوبة هي

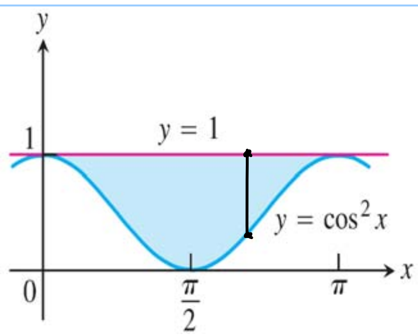
$$A = \int_{-1}^{2} 2 - x^2 + x \, dx$$

$$= 2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \Big]_{-1}^{2} = \boxed{\frac{9}{2}}$$

3) Find the area of the region bounded by the curves $y = \cos^2 x$ and $y = 1$ from $x = 0$ to $x = \pi$.

**Sol:**

$$A = \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 x) \, dx$$



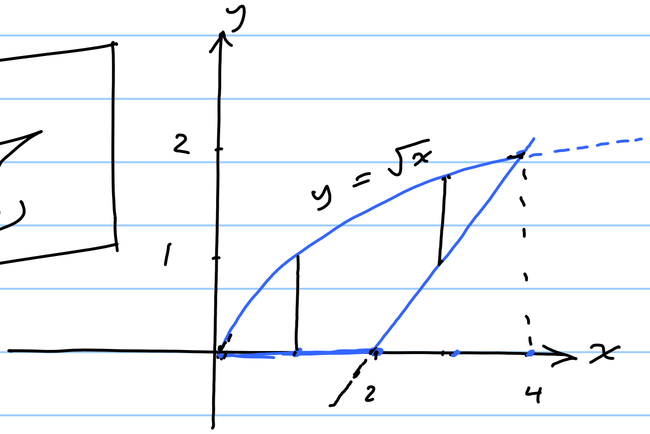

$$= \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} 1 - \cos 2x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[ x - \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{2} \left[ \left(\pi - \cancel{\frac{\sin 2\pi}{2}}^{\,0}\right) - \left(0 - \cancel{\frac{\sin 0}{2}}^{\,0}\right) \right] = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

4) Find the area of the region in the first quadrant that in bounded above by $y=\sqrt{x}$ and below by $x$-axis and $y=x-2$.

Sol:

سنقوم بحل السؤال بطريقتين ،




حل 1

خذ الخط المرسوم داخل المنطقة موازياً لمحور y

واكتب المعادلات بالصورة المناسبة ، $y=\sqrt{x}$ ، $y=0$ ، $y=x-2$ .

لاحظنا أنه طول الخط يتغير بعد النقطة 2 .

ثم إيجاد حدود التكامل . $\sqrt{x}=x-2 \Rightarrow x=(x-2)^2$

$\Rightarrow (x-1)(x-4)=0 \Rightarrow x=1,4.$

لاحظ أنه $x=1$ ليست نقطة تقاطع ، وأنه $x=4$ هي نقطة تقاطع (لماذا).

معادلات طول الخط

In the interval $[0,2]$, $l=\sqrt{x}-0=\sqrt{x}$.

In the interval $[2,4]$, $l=\sqrt{x}-(x-2)=\sqrt{x}-x+2$.

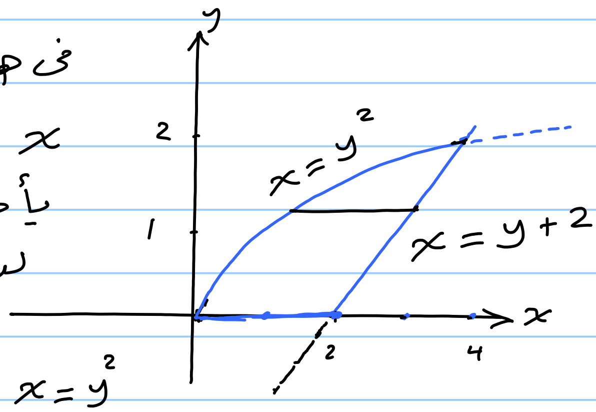
$$\Rightarrow l(x) = \text{طول الخط} = \begin{cases} \sqrt{x}, & 0\le x\le 2 \\ \sqrt{x}-x+2, & 2\le x\le 4. \end{cases}$$

$$\therefore A=\int_0^4 l(x)\,dx=\int_0^2\sqrt{x}\,dx+\int_2^4 \sqrt{x}-x+2\,dx=\boxed{\frac{10}{3}}$$

حل 2

في هذا الحل ، نلاحظ أنه الخط إذا رسم موازياً لمحور x فإنه طول على حركته لا تتغير معادلته بل يأخذ معادلة واحدة فقط ،

لذلك خذ الخط المرسوم داخل المنطقة موازياً لمحور x ، واكتب المعادلات بالصورة $x=y+2$ ، $x=y^2$ ثم حدد حركة الخط في المنطقة



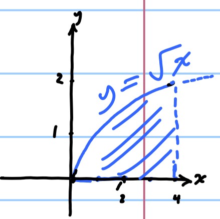
من ٠ إلى 2 على محور y . وعليه فإن طول الخط يأخذ معادلة واحدة فقط هي

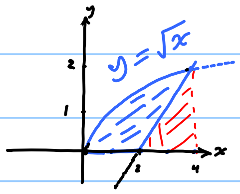
$$\ell(y) = (y+2) - y^2$$

المنحنى الأكبر - المنحنى الأصغر / وهنا المنحنى الأكبر هو المنحنى على اليمين.
[في اتجاه محور x يكون المنحنى الأكبر على اليمين / وفي اتجاه y يكون المنحنى الأكبر هو المنحنى الأعلى ].

$$\therefore A = \int_0^2 (y+2) - y^2 \, dy = \frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3} \Big]_0^2 = \boxed{\frac{10}{3}}$$

**ملحوظة:** بشكل خاص من هذا السؤال / يمكن إيجاد المساحة تحت المنحنى $y = \sqrt{x}$ من ٠ إلى 4 ثم نطرح منه مساحة المثلث المظلل.




$$A = \int_0^4 \sqrt{x}\, dx - \frac{1}{2}(2)(2) = \frac{2}{3} * 8 - 2 = \boxed{\frac{10}{3}}$$

## محلول لهذا الفصل

1) $$\int_1^4 \frac{10\sqrt{v}}{(1+v^{\frac{3}{2}})^2} \, dv$$

$u = 1 + v^{\frac{3}{2}}$

$du = \frac{3}{2} v^{\frac{1}{2}} \, dv$

$\frac{2}{3} du = \sqrt{v}\, dv$

$v = 1 \longrightarrow u = 1$

$v = 4 \longrightarrow u = 9$

$$= 10 \cdot \frac{2}{3} \int_1^9 \frac{du}{u^2} = \frac{20}{3} \cdot \frac{-1}{u} \Big]_1^9$$

$$= \frac{20}{3}\left[1 - \frac{1}{9}\right] = \boxed{\frac{160}{27}}$$

2) $$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos z}{\sqrt{4 + 5\sin z}} \, dz$$

$u = 4 + 5\sin z$

$du = 5\cos z \, dz$

$\frac{du}{5} = \cos z \, dz$

$z = \frac{\pi}{2} \longrightarrow u = 9$

$z = \pi \longrightarrow u = 4$

$$= \frac{1}{5} \int_9^4 \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{5} \cdot 2\sqrt{u} \Big]_9^4 = \boxed{\frac{-2}{5}}$$

3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos z}{\sqrt{4+5\sin z}}\, dz$ .

$u = 4 + 5\sin z$

$du = 5\cos z\, dz$

$\frac{du}{5} = \cos z\, dz$ .

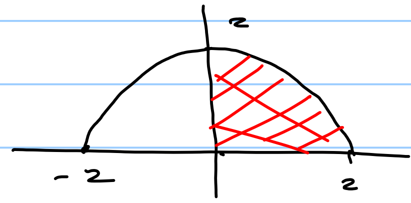
$z = -\pi \longrightarrow u = 4$

$z = \pi \longrightarrow u = 4$ .

so $\displaystyle\frac{1}{5}\int_{4}^{4} \frac{du}{\sqrt{u}} = \boxed{0}$

4) $\displaystyle\int_{0}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx =$ مساحة ربع الدائرة

$= \frac{1}{4}\pi \cdot 2^2 = \boxed{\pi}$




5) $\displaystyle\int_{0}^{2} x\sqrt{4-x^2}\, dx$

$u = 4 - x^2$

$du = -2x\, dx$

$\frac{du}{-2} = x\, dx$

$x = 0 \longrightarrow u = 4$

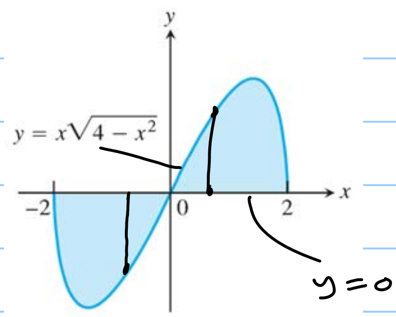
$x = 2 \longrightarrow u = 0$

$\displaystyle = \frac{-1}{2}\int_{4}^{0} \sqrt{u}\, du = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big]_{4}^{0}$

$= -\frac{1}{3}\left[0 - 8\right] = \boxed{\frac{8}{3}}$

6) Find the area of the shaded region.

(a)




sol:

حل 1

باستخدام فكرة Total Area بإيجاد المساحة

بين منحنى وبين محور x كالتالي

$\displaystyle A = \left|\int_{-2}^{0} x\sqrt{4-x^2}\right| + \left|\int_{0}^{2} x\sqrt{4-x^2}\right| = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \boxed{\frac{16}{3}}$

(انظر مثال (5) السابق).

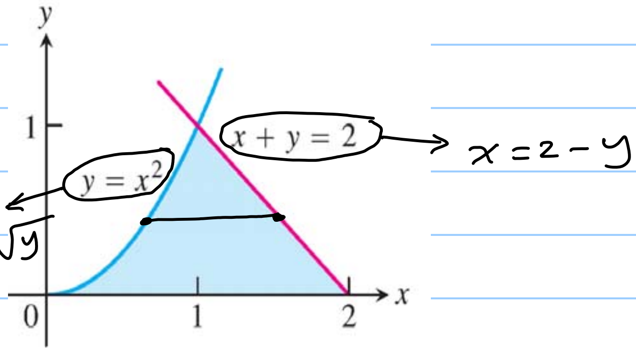
حل 2

باستخدام المساحة بين المنحنيات باعتبار محور $x$ منحنى معادلته $y = 0$ .
هنا نجد أن طول الخط سيتغير كالتالي

$$\ell(x) = \begin{cases} 0 - x\sqrt{4-x^2}, & -2 \le x < 0 \\ x\sqrt{4-x^2} - 0, & 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

$$\therefore A = \int_{-2}^{0} -x\sqrt{4-x^2}\,dx + \int_{0}^{2} x\sqrt{4-x^2}\,dx = \boxed{\frac{16}{3}}$$

(b)

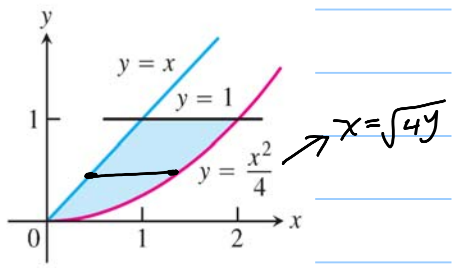



sol: نلاحظ هنا أن رسم الخط في المنطقة موازياً لمحور $y$ يجزئ تكامل المساحة (Do it) ، ومن المقابل فإن رسمه موازياً لمحور $x$ يجعل المساحة تكامل واحد.
لذلك نفضل رسم الخط موازياً لمحور $x$ وكتابة المعادلات $x = 2-y$ , $x = \sqrt{y}$
وحدود التكامل هي مجال حركة الخط من 0 إلى 1 على محور $y$ . وبالتالي

$$A = \int_0^1 (2-y) - \sqrt{y}\;dy = 2y - \frac{y^2}{2} - \frac{2}{3}y^{3/2}\Big]_0^1 = \boxed{\frac{5}{6}}$$

7) Find the area of the region bounded above by the curves $y = x$ and $y = 1$, and below by $y = x^2/4$.

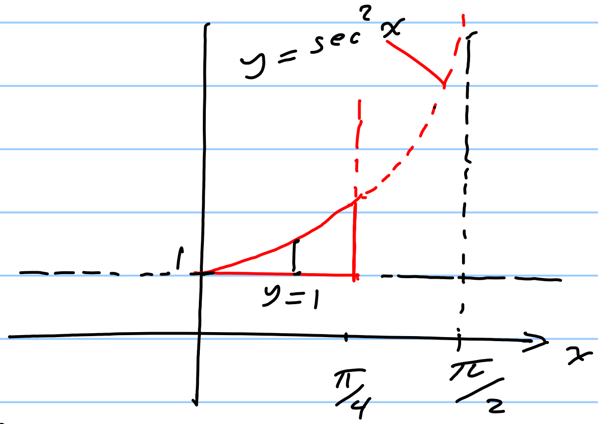
sol: ارسم خط موازي لمحور $x$ وأعد كتابة المعادلات بالصورة $x = \sqrt{4y}$ , $x = y$ وبالتالي




$$A = \int_0^1 \left(\sqrt{4y} - y\right) dy$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}(4y)^{3/2} - \frac{y^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{1}{6}4^{3/2} - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{5}{6}}$$

8) Find the area of the region between the curves $y = \sec^2 x$, $y = 1$, $x = 0$ and $x = \pi/4$.




sol:

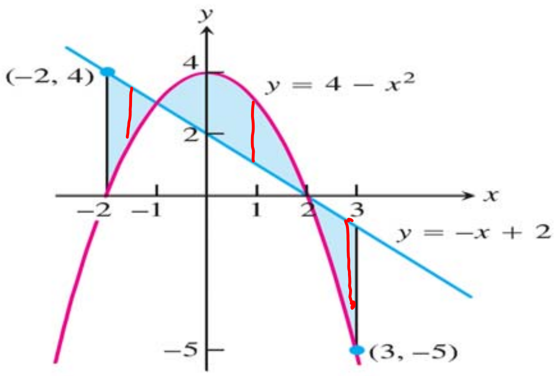
$$A = \int_0^{\pi/4} \sec^2 x - 1 \, dx$$

$$= \tan x - x \Big]_0^{\pi/4}$$

$$= \left(\tan \tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\pi}{4}\right) - (\tan 0 - 0)$$

$$= \boxed{1 - \tfrac{\pi}{4}}$$

9) Find the area of the shaded region in figure




Sol:

$$A = \int_{-2}^{-1} (2-x) - (4-x^2)\, dx + \int_{-1}^{2} (4-x^2) - (2-x)\, dx + \int_{2}^{3} (2-x) - (4-x^2)\, dx$$

$$= \boxed{\frac{49}{6}}$$

End of chapter 5