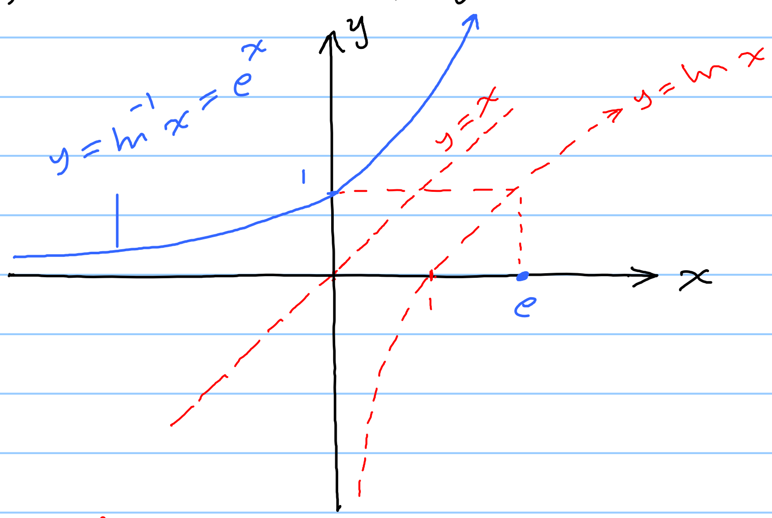
7.3 Exponential Funs:

The Inverse of $\ln x$ and the number e:

In sec 7.2, we see that $\ln x$ is 1-1 fun with domain $(0,\infty)$ and range $(-\infty,\infty)$, so the inverse fun $\ln^{-1}x$ exists with domain $(-\infty,\infty)$ and range $(0,\infty)$.
The graph of $\ln^{-1}x$ is the graph of $\ln x$ reflected about $y=x$



Finding $\ln^{-1}x$ algebrically:

Let e be the number were $\ln e = 1$. Consider the exponetial e^x with base e. For example, $e^2 = e\cdot e$, $e^{-2} = \frac{1}{e^2}$, $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$ and so on.
Now for $x \in \mathbb{R}$,

$$\ln e^x = x \ln e = x \cdot 1 = x$$

but $\ln(\ln^{-1}x) = x$ and $\ln x$ is $1-1$, therefore the natural expontial fun

$$\boxed{\ln^{-1}x = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}} \quad \ldots\ldots (*)$$

Remarks: 1) From $(*)$, we get that

$$\forall x>0,\ e^{\ln x} = x \quad \text{and} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \ln e^x = x.$$

2) From graph of $y = e^x$ above, we get that

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$, $\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$, and $e^0 = 1$

Moreover, we can approximate $e = e^1 \simeq 2.718281828\cdots$ which is irrational number.

Examples:

1) $\ln e^2 = 2$ (2) $\ln \sqrt{e} = \frac{1}{2}$

3) $e^{\ln(x^2+1)} = x^2 + 1$ (4) $e^{3\ln 2} = e^{\ln(2^3)} = 2^3 = 8$

5) $\ln e^{(-5x+2)} = -5x + 2$

6) Solve for x: $e^{2x-6} = 10$

Sol:

$\ln(e^{2x-6}) = \ln 10 \Rightarrow 2x - 6 = \ln 10$

$\therefore 2x = 6 + \ln 10$

$\therefore \boxed{x = 3 + \frac{1}{2}\ln 10}$

The Derivative and Integral of e^x

Suppose $y = e^x \Rightarrow \ln y = \ln e^x = x$

$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y$. Hence

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

By chain rule we have

$$\boxed{\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}}$$

And this implies that

$$\boxed{\int e^u\,du = e^u + C}$$

Remark: We can prove that $\int e^{ku}\,du = \frac{e^{ku}}{k} + C$

Examples:

1) Find $\frac{dy}{dx}$ if

a) $y = e^{-5x}$

sol: $y' = e^{-5x} * -5 = -5e^{-5x}$

b) $y = 3e^{\sin x^2} \Rightarrow y' = 3e^{\sin x^2} * \cos x^2 * 2x$

$= 6x\cos x^2\, e^{\sin x^2}$

c) $y = e^{\sqrt{x^2+1}}$

$y' = e^{\sqrt{x^2+1}} * \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} * 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\, e^{\sqrt{x^2+1}}$

$e^{2x^2+y} = \sin(x+3y^2)$

sol: $e^{2x^2+y}(4x+y') = \cos(x+3y^2)(1+6yy')$

$\therefore y'\left[e^{(2x^2+y)} - 6y\cos(x+3y^2)\right] = \cos(x+3y^2) - 4x\,e^{(2x^2-y)}$

$$y' = \frac{\cos(x+3y^2) - 4x\,e^{(2x^2-y)}}{e^{(2x^2+y)} - 6y\cos(x+3y^2)}$$

2) $\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}\int e^{u}\,du$ $\qquad$ $u = 3x$, $du = 3\,dx$

$= \frac{1}{3}e^{u} + C = \frac{e^{3x}}{3} + C$

3) $\int_0^{\pi/2} e^{\sin x}\cos x\,dx$ $\qquad$ $u = \sin x$, $du = \cos x\,dx$

$x = 0 \longrightarrow u = 0$

$x = \pi/2 \longrightarrow u = 1$

$\int_0^1 e^{u}\,du = e^{u}\Big]_0^1 = \boxed{e-1}$

Laws of Exponents:

THEOREM 3 For all numbers x, x_1, and x_2, the natural exponential e^x obeys the following laws:

1. $e^{x_1}\cdot e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$

2. $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

3. $\frac{e^{x_1}}{e^{x_2}} = e^{x_1-x_2}$

4. $(e^{x_1})^r = e^{rx_1}$, if r is rational

Examples: 1) $e^{x-\ln 2} = e^{x}\cdot e^{-\ln 2} = e^{x}\cdot\frac{1}{e^{\ln 2}} = \frac{1}{2}e^{x}$

2) Solve for $x>0$: $e^{x^2}e^{(2x+1)} = 5$

Sol. $e^{(x^2+2x+1)} = 5 \Rightarrow e^{(x+1)^2} = 5$

$\therefore (x+1)^2 = \ln 5 > 0$ so $x+1 = \sqrt{\ln 5}$

Therefore $\boxed{x = \sqrt{\ln 5} - 1}$

The General Exponential fun a^x.

DEFINITION For any numbers $a > 0$ and x, the **exponential function with base a** is

$$a^x = e^{x \ln a}.$$

ملحوظات : ١- لأن $a>0$ لاحظ من التعريف أن مجال ومدى الدالة a^x
هو نفس مجال ومدى الدالة e^x ، وبالتالي فإن

$$D(a^x) = (-\infty, \infty) \quad \text{and} \quad R(a^x) = (0, \infty)$$

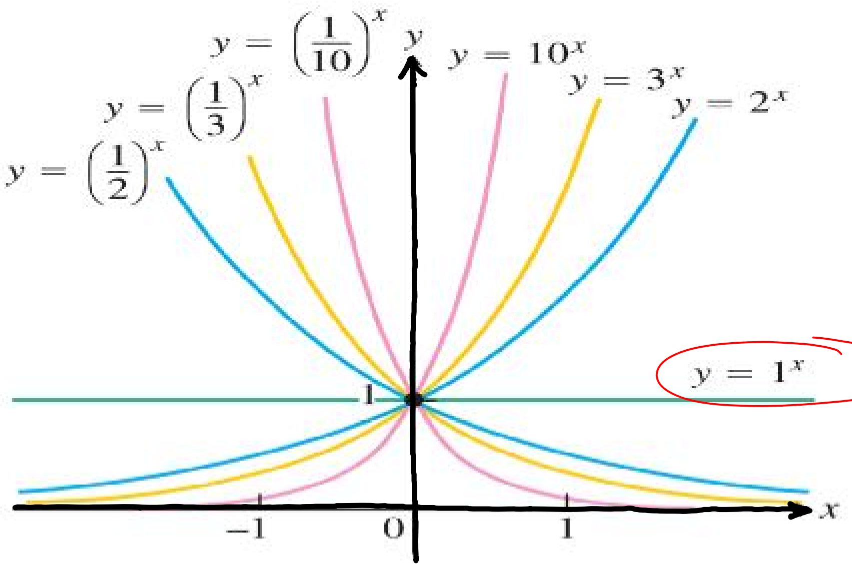
2) الدالة $y = e^x$ هي حالة خاصة من الصورة العامة $y=a^x$ حيث
$a = e \simeq 2.718281828\ldots$

3) لرسم الدالة $y=a^x$ نلاحظ ما يلي :

أ) عندما $a=1$ فإن $\ln a=0$ وبالتالي $y = a^x = e^{x \ln a} = e^0 = 1$
رسمه الخط الأفقي $\boxed{y=1}$

ب) عندما $a>1$ فإن $\ln a>0$ وبالتالي $y = a^x = e^{x \ln a}$
لها رسمة مشابهة لرسمة الدالة $y = e^x$.

ج) وعندما $0<a<1$ فإن $\ln a<0$ وبالتالي $y = a^x = e^{x \ln a}$
لها رسمة مشابهة لرسمة الدالة $y = e^{-x}$. (انظر الرسم) .



4) يتضح مما سبق أنه لأي $a>0$ ، $a \neq 1$ ، الدالة $y=a^x$
هي دالة ١-١ ولذا فإن لها دالة عكسية سوف ندرس لاحقاً .

5) من الرسم يمكن ملاحظة ما يلي :

أ) إذا كانت $a>1$ فإن $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$ ، $\lim_{x\to -\infty} a^x = 0$

ب) إذا كانت $0<a<1$ فإن $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$ ، $\lim_{x\to -\infty} a^x = \infty$.

6) من التعريف $a^x = e^{x\ln a}$ ، يمكن اثبات قوانين الأسس العام

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \text{ and}$$

$$(a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}.$$

Proof of Power Rule (final form)

DEFINITION For any $x > 0$ and for any real number n,

$$x^n = e^{n \ln x}.$$

General Power Rule for Derivatives

For $x > 0$ and any real number n,

$$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}.$$

If $x \leq 0$, then the formula holds whenever the derivative, x^n, and x^{n-1} all exist.

PF: For $x > 0$, $x^n = e^{n\ln x} \Rightarrow \frac{d}{dx}(x^n) = e^{n\ln x} \cdot \frac{n}{x}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(x^n) = x^n \cdot \frac{n}{x} = n x^{n-1}$$

Example: Find $\frac{dy}{dx}$ if $y = (5x^2 + 3x - 2)^{\sqrt{2}}$

Sol:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{2}\,(5x^2 + 3x - 2)^{\sqrt{2}-1} * (10x + 3).$$

The Derivative of $y = a^x$:

Thrm: $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a.$

PF: $y = a^x \Rightarrow \ln y = x \ln a \Rightarrow \frac{1}{y} y' = \ln a$

$$\therefore \; y' = y \ln a = a^x \ln a. \qquad \square$$

ملحوظة: باستخدام قانون السلسلة ، نحصل على

$$\frac{d}{dx}(a^u) = a^u \ln a \cdot \frac{du}{dx}$$

The Integral $\int a^x dx$

من الإشتقاق السابق يمكن استنتاج التكامل التالي :

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

Examples: 1) Find $\frac{dy}{dx}$ if

a) $y = 5^{-x^2}$

Sol: $y' = 5^{-x^2} \cdot \ln 5 * (-2x)$

b) $y = 3^{\ln x}$

$\therefore \quad y' = 3^{\ln x} \cdot \ln 3 \cdot \frac{1}{x}$.

c) $y = \ln^3 x \; \left(= (\ln x)^3 \right)$

$y' = 3 \ln^2 x \cdot \frac{1}{x}$.

d) $y = x^x$

Sol: بداية يجب الإنتباه أن القوانين المتوفرة من مشتقات القوى هي
إما للصورة (دالة)^ثابت كما في النقطتين (b) و (a)
أو للصورة (ثابت)^دالة كما في النقطة (c)
والدالة الموجودة هي (دالة)^دالة لا ينطبق عليها أي من القوانين السابقة ، لذلك فإننا يجب أن
نستفيد من خصائص اللوغاريتمات لإيجاد الإشتقاق كالتالي :

$$\ln y = \ln x^x = x \ln x .$$

$$\therefore \quad \frac{1}{y} \cdot y' = x \cdot \frac{1}{x} + \ln x = 1 + \ln x$$

$$\Rightarrow \quad y' = y(1 + \ln x) = x^x (1 + \ln x) .$$

2) Evaluate the following Integrals:

a) $\int 2^{\sin x} \cos x \, dx$

$u = \sin x$
$du = \cos x \, dx$

$$= \int 2^u \, du = \frac{2^u}{\ln 2} + C = \boxed{\frac{2^{\sin x}}{\ln 2} + C}$$

b) $\displaystyle\int \frac{e^x}{4^{e^x}} \, dx$

$$= \int 4^{-e^x} \cdot e^x \, dx \qquad\qquad u = -e^x, \quad du = -e^x \, dx$$

$$= -\int 4^u \, du = -\frac{4^u}{\ln 4} + C$$

$$= \frac{-4^{-e^x}}{\ln 4} + C = \boxed{\frac{-1}{4^{e^x} \ln 4} + C}$$

THEOREM 4—The Number e as a Limit The number e can be calculated as the limit

$$e = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}.$$

PF: Let $f(x) = \ln x$. So $f'(x) = \frac{1}{x}$ and hence $f'(1) = 1$. Using definition, we get that

$$1 = f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h) - \cancel{\ln 1}^{\,0}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \ln(1+h) = \lim_{h \to 0} \ln(1+h)^{\frac{1}{h}}$$

$$= \ln\left(\lim_{h \to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} \right) \qquad \text{since } \ln x \text{ is continuous}$$

$$\therefore \lim_{h \to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e^1 = e. \qquad \square$$

Logarithms with Base $a > 0$:

في ملحوظة سابقة، وجدنا أنه لأي $a > 0$, $a \neq 1$ تكون الدالة

$y = a^x$ 1-1 وبالتالي فإنه يوجد لهذه الدالة معكوس،

يسمى دالة اللوغاريتم بالأساس a .

DEFINITION For any positive number $a \neq 1$, $\log_a x$ is the inverse function of a^x.

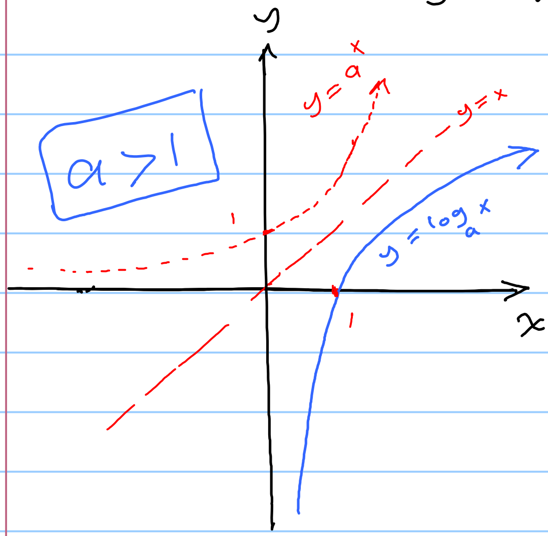
ملحوظات : ١- من التعريف نجد أنه لأي $a>0$ ، $a\neq 1$

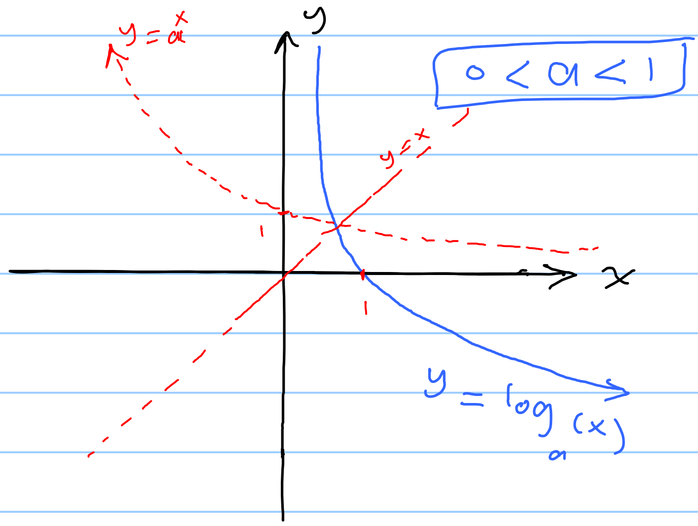
$$D(\log_a x) = (0,\infty) \quad , \quad R(\log_a x) = (-\infty,\infty)$$

٢- $\log_a(a^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$, and

$$a^{\log_a(x)} = x \quad \forall x>0 ,$$

٣- لرسم الدالة $y=\log_a x$ ، نقوم بعكس الدالة $y=a^x$ حول محور x ،
وعليه فإن الشكل العام للرسمة إما مشابه لرسمة $y=\ln x$ عندما
$a>1$ ، وإما مشابه لرسمة $y=-\ln x$





٤- من الرسم يتضح ما يلي :

a) $$\lim_{x\to 0^+}(\log_a x) = \begin{cases} -\infty & \text{if } a>1 \\ \infty & \text{if } 0<a<1 \end{cases} \quad , \quad \text{and}$$

b) $$\lim_{x\to \infty}(\log_a x) = \begin{cases} \infty & \text{if } a>1 \\ -\infty & \text{if } 0<a<1 \end{cases}$$

٤- عندما $a=e$ فإن الدالة اللوغاريتمية $\log_e x$ هي دالة عكسية للدالة $y=e^x$ وبالتالي

$$\boxed{\log_e x = \ln x}$$

Thrm: For $a>0$, $a\neq 1$,

$$\boxed{\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}}$$

PF: Suppose $y = \log_a x \Rightarrow a^y = x$

نأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين ،

$$\Rightarrow \quad y \ln a = \ln x$$

$$\Rightarrow \quad \log_a x = y = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$\square$

Derivatives and Integrals Involving $\log_a x$

Note that

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{d}{dx}\frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$

So by chain rule we get that

$$\frac{d}{dx}\log_a u = \frac{1}{u \ln a} * \frac{du}{dx}.$$

ملحوظات ١- التكامل الذي يحتوي على الدالة $y=\log_a x$ يتم التعامل معه بتحويل الدالة $y=\log_a x$ لقانونها $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

٢- يمكن باستخدام القانون $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ إثبات أن لأي $a>0$, $a\neq 1$ ، $x, y > 0$ ،

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y,$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y,$$

$$\log_a(x^k) = k\log_a x, \quad \text{and} \quad \log_a \frac{1}{x} = -\log_a x.$$

Examples:

1) Simplify the expression

$$\log_4\left(2^{e^x \sin x}\right)$$

sol: 1st

$$\log_4\left(2^{e^x \sin x}\right) = \log_4\left(\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^{e^x \sin x}\right)$$

$$= \log_4\left(4^{\frac{1}{2}e^x \sin x}\right) = \frac{1}{2} e^x \sin x .$$

2nd $$\log_4\left(2^{e^x \sin x}\right) = \frac{\ln 2^{e^x \sin x}}{\ln 4} = \frac{(e^x \sin x)\cancel{\ln 2}}{2\cancel{\ln 2}}.$$

$$= \frac{e^x \sin x}{2}$$

2) Find $\frac{dy}{dx}$ if $y = \log_{10}(3x^2+1)$

sol:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(3x^2+1)\ln 10} * 6x = \frac{6x}{\ln 10\,(3x^2+1)}$$

3) Evaluate the integral $\int \frac{dx}{x(\log_8 x)^2}$

sol: $$\int \frac{dx}{x(\log_8 x)^2} = \int \frac{dx}{x\left(\ln^2 x/\ln^2 8\right)}$$

$$= \ln^2 8 \int \frac{dx}{x \ln^2 x}$$

$u = \ln x$

$du = \frac{1}{x}\,dx$

$$= \ln^2 8 \int \frac{du}{u^2} = \ln^2 8 * \frac{-1}{u} + C$$

$$= \boxed{\frac{-\ln^2 8}{\ln x} + C}$$