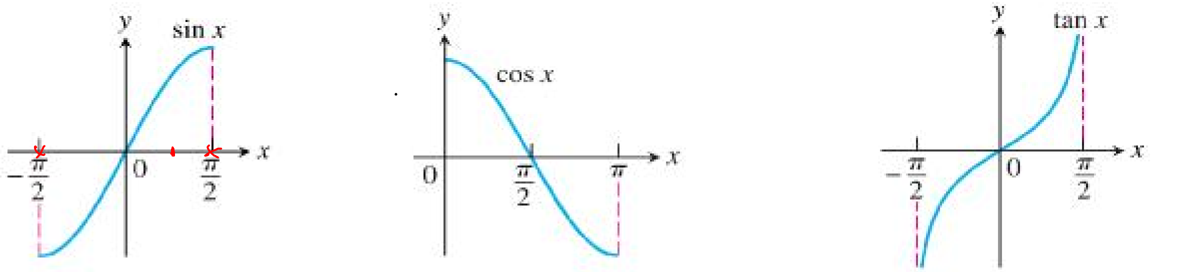
7.6 Inverse Trigonometric Functions

Note Title ٣٣/٠٣/٢٧

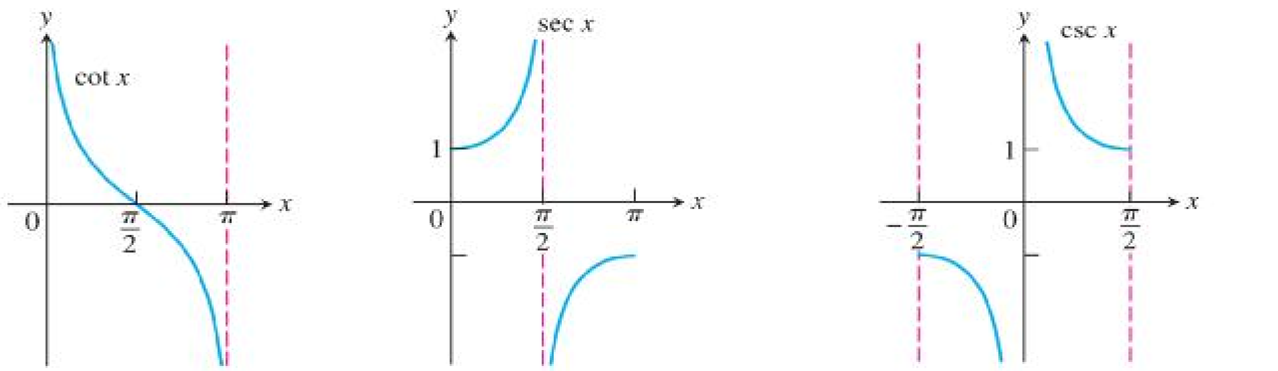
مقدمة : الدوال المثلثية دوال ليست ١-١ على مجالها لوجود تكرار دوري للقيم ، لكن يمكن تحديد مجال كل دالة لتكون ١-١ ، ومن ثم تعريف دالة عكسية لها .
مثال ذلك ، $y = \cos x$ ليست ١-١ على $\mathbb{R}$ لأن $\cos 0 = \cos 2\pi$ ، في المقابل هي نفس الدالة ١-١ على المجال $[0, \pi]$ بمدى $[-1, 1]$. الرسومات التالية توضح كيفية تحديد مجال الدوال المثلثية الستة لتكون ١-١ ، ومن ثم نعرف عليها المعكوس .



$y = \sin x$
Domain: $[-\pi/2, \pi/2]$
Range: $[-1, 1]$

$y = \cos x$
Domain: $[0, \pi]$
Range: $[-1, 1]$

$y = \tan x$
Domain: $(-\pi/2, \pi/2)$
Range: $(-\infty, \infty)$



$y = \cot x$
Domain: $(0, \pi)$
Range: $(-\infty, \infty)$

$y = \sec x$
Domain: $[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$
Range: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

$y = \csc x$
Domain: $[-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$
Range: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

Defs: 1) The inverse sine fun – denoted by $\sin^{-1} x$ or arcsine x – is defined as follows:

$$\forall x \in [-1, 1], \quad y = \sin^{-1} x \quad \text{iff} \quad \sin y = x, \quad y \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}].$$

2) The inverse cosine fun – denoted by $\cos^{-1} x$ or arccos x – is defined as follows:

$$\forall x \in [-1, 1], \quad y = \cos^{-1} x \quad \text{iff} \quad \cos y = x, \quad y \in [0, \pi].$$

3) $\forall x \in (-\infty, \infty)$, $y = \tan^{-1} x$ iff $\tan y = x$, $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

4) $\forall x \in (-\infty, \infty)$, $y = \cot^{-1} x$ iff $\tan y = x$, $y \in (0, \pi)$

5) $\forall |x| \geq 1$, $y = \sec^{-1} x$ iff $\sec y = x$, $y \in (0, \pi) - \{\frac{\pi}{2}\}$

6) $\forall |x| \geq 1$, $y = \csc^{-1} x$ iff $\csc y = x$, $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) - \{0\}$

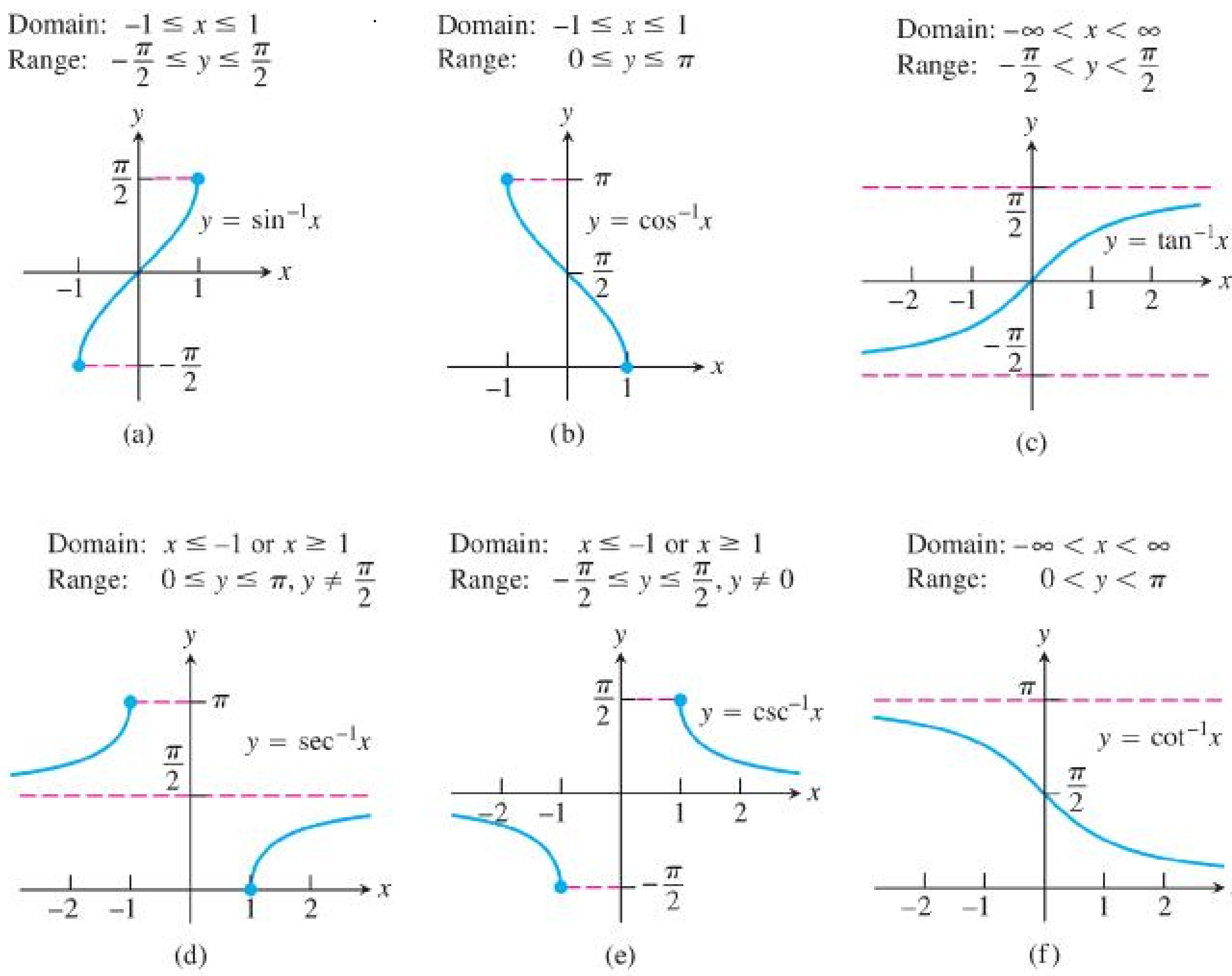


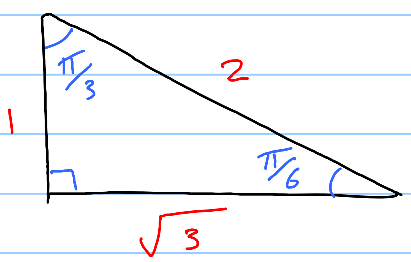
Illustration: $\sin^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ since $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

ملحوظة : نلاحظ أنه جميع الدوال المثلثية العكسية زوايا تكون إما من الربع "الأول أو الثاني" أو "الأول أو الرابع"

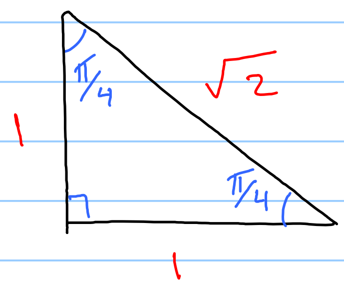
الجدول التالي يوضح التعريفات السابقة للدوال المثلثية العكسية.

	Function	Domain	Range	Illustration
1-	$y = \sin^{-1} x$	$x \in [-1, 1]$	$y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$\sin(\sin^{-1} \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ $\sin^{-1}(\sin \frac{-\pi}{4}) = \frac{-\pi}{4}$ $\sin^{-1}(\sin \frac{3\pi}{4}) \neq \frac{3\pi}{4}$
2-	$y = \cos^{-1} x$	$x \in [-1, 1]$	$y \in [0, \pi]$	$\cos(\cos^{-1} \frac{-1}{2}) = \frac{-1}{2}$ $\cos^{-1}(\cos \frac{3\pi}{4}) = \frac{3\pi}{4}$ $\cos^{-1}(\cos \frac{-\pi}{4}) \neq \frac{-\pi}{4}$
3-	$y = \tan^{-1} x$	$x \in (-\infty, \infty)$	$y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$\forall x \in \mathbb{R},\ \tan(\tan^{-1} x) = x$ $\tan^{-1}(\tan \frac{-\pi}{6}) = \frac{-\pi}{6}$ $\tan^{-1}(\tan \frac{2\pi}{3}) \neq \frac{2\pi}{3}$
4-	$y = \sec^{-1} x$	$\lvert x \rvert \geq 1$ $[x \notin (-1,1)]$	$y \in [0, \pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$	
5-	$y = \csc^{-1} x$	$\lvert x \rvert \geq 1$	$y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] - \{0\}$	
6-	$y = \cot^{-1} x$	$x \in (-\infty, \infty)$	$y \in (0, \pi)$	

مثلثات خاصة



مثلث ثلاثين ستيني



مثلث متساوي الساقين

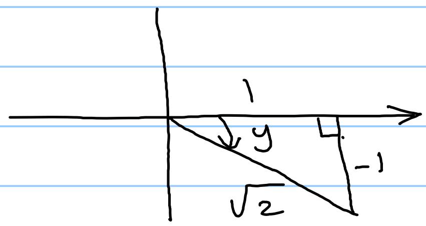
Examples:

1) Find the value of y for the following:

a) $y = \sin^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

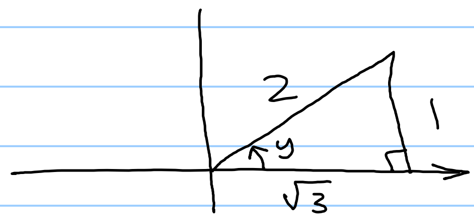
بداية ، ولجميع الدوال المثلثية العكسية ، فإنه فيتمثل عند النقاط الموجبة دائماً في الربع الأول كزاوية ، ومتى عند النقاط السالبة تكون من الربع الآخر (إما الرابع أو الثاني حسب الدالة العكسية) .

من هذا السؤال / من المعلوم أن $y = \sin^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ كزاوية هي إما في الربع الأول أو الربع الرابع / ولأن $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ هي سالبة / لذا ستكون من الربع الرابع حيث $\sin y = \frac{-1}{\sqrt{2}}$



$\therefore \boxed{y = -\pi/4}$

b) $y = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

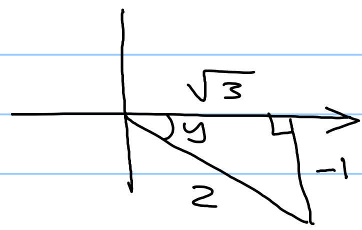


sol: $\cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y \in [0, \pi]$

$\Rightarrow \boxed{y = \frac{\pi}{6}}$

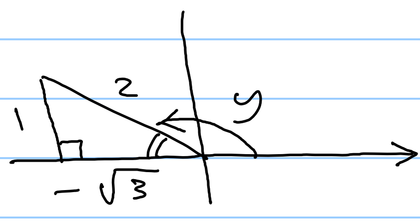
c) $y = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$

sol: $\tan y = \frac{-1}{\sqrt{3}}$, $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



$\therefore \boxed{y = -\pi/6}$

d) $y = \cos^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$



sol: $\cos y = \frac{-\sqrt{3}}{2}$, $y \in [0, \pi]$

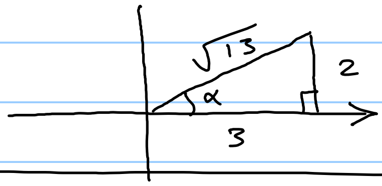
$\Rightarrow \boxed{y = \frac{5\pi}{6}}$

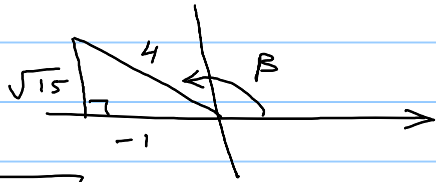
2) Find the exact value of

$$\sec\left(\tan^{-1}\tfrac{2}{3}\right) + \sin\left(\cos^{-1}\tfrac{-1}{4}\right)$$

Sol: Set $\alpha = \tan^{-1}\frac{2}{3}$ and $\beta = \cos^{-1}\frac{-1}{4}$, so we have

$\tan\alpha = \frac{2}{3}$ and $\cos\beta = \frac{-1}{4}$





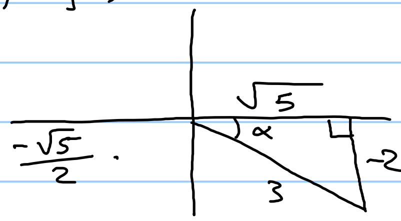
$$\therefore \boxed{\sec\alpha + \sin\beta = \frac{\sqrt{13}}{3} + \frac{\sqrt{15}}{4}}$$

3) If $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{-2}{3}\right)$, find $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, ...

Sol: $\sin\alpha = \frac{-2}{3}$ and $\alpha \in [-\pi/2, 0]$, so

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\tan\alpha = \frac{-2}{\sqrt{5}}$,

$\sec\alpha = \frac{3}{\sqrt{5}}$, $\csc\alpha = \frac{-3}{2}$, and $\cot\alpha = \frac{-\sqrt{5}}{2}$.



The Relations Between Inverse Trig. funs

1- $\sec^{-1} x = \cos^{-1}\frac{1}{x}$

2- $\csc^{-1} x = \sin^{-1}\frac{1}{x}$

3- $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$ (odd fun)

4- $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}(x)$ (odd fun)

5- $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$ $\left(\cos^{-1} x + \cos^{-1} -x = \pi\right)$

6- $\cos^{-1}(x) = \pi/2 - \sin^{-1} x$

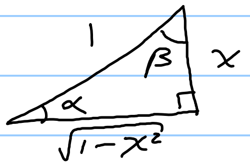
7- $\cot^{-1} x = \pi/2 - \tan^{-1} x$

8- $\csc^{-1} x = \pi/2 - \sec^{-1} x$

PF: 1) Let $\alpha = \sec^{-1} x \Rightarrow \sec\alpha = x \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{x}$

$\therefore \alpha = \cos^{-1}\frac{1}{x}$

6) مثلث $\left.\begin{array}{l}\alpha = \sin^{-1} x \\ \beta = \cos^{-1} x\end{array}\right\} \Rightarrow$



$\Rightarrow \boxed{\alpha + \beta = \pi/2}$

ملحوظة : باستخدام المتطابقة (4) / (7) / لاحظ ما يلي :

$$\cot^{-1}(-x) \overset{③}{=} \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(-x) \overset{⑤}{=} \frac{\pi}{2} + \tan^{-1} x$$

Examples:

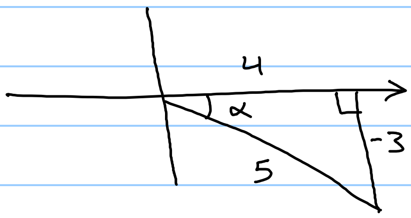
1) Find the value of $\tan(\sec^{-1} 1)$

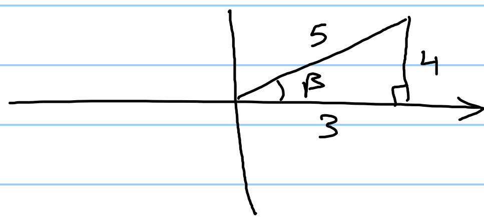
Sol: $\alpha = \sec^{-1} 1 = \cos^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = 0$

$\therefore \tan\alpha = \tan 0 = \boxed{0}$

2) $\cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{-3}{4}\right) - \sin^{-1}\frac{4}{5}\right)$

sol: Set $\alpha = \tan^{-1}\frac{-3}{4}$, $\beta = \sin^{-1}\frac{4}{5}$, so



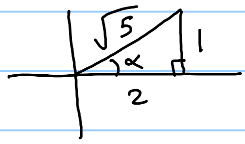


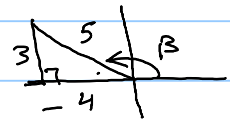
$\therefore \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$= \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} + \left(\frac{-3}{5}\right) \cdot \frac{4}{5} = \boxed{0}$

3) $\csc\left(\tan^{-1}\frac{1}{2} - \cos^{-1}\frac{-4}{5}\right)$

sol: Set $\alpha = \tan^{-1}\frac{1}{2}$, $\beta = \cos^{-1}\frac{-4}{5}$





نقوم أولاً بحساب $\sin(\alpha-\beta)$ ثم نعكس الإجابة للحصول على $\csc(\alpha-\beta)$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{-4}{5} - \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{3}{5} = \frac{-10}{5\sqrt{5}} = \frac{-2}{\sqrt{5}}$

$\therefore \csc(\alpha - \beta) = \boxed{\frac{-\sqrt{5}}{2}}$

4) Find the value of $\sec^{-1}\left(\sec\frac{-\pi}{6}\right)$

Sol: Firstly, $\sec^{-1}\left(\sec\frac{-\pi}{6}\right) \neq \frac{-\pi}{6}$ since $\frac{-\pi}{6} \notin [0,\pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$

Note that $\sec x$ is even, so $\sec(-\pi/6) = \sec \pi/6$

so

$$\sec^{-1}(\sec -\pi/6) = \sec^{-1}(\sec \pi/6) = \pi/6$$

لما داه إن ميزة حيث تأكد $\pi/6$ تنتمي لمدى الدالة $\sec^{-1}x$.

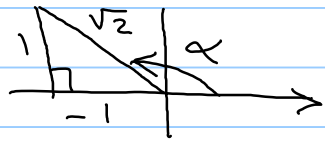
5) $\cot^{-1}(\cot -\pi/4) = \alpha$

<u>sol:</u> $\cot -\pi/4 = -1$ (Do it).

so $\cot^{-1}(\cot -\pi/4) = \cot^{-1}(-1) = \alpha \in (0, \pi)$

$\therefore \cot\alpha = -1$

$\therefore \boxed{\alpha = \frac{3\pi}{4}}$



Derivatives of Inverse Trig. funs and Integration.

Thrm:

1) $\frac{d}{dx} \sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$

2) $\frac{d}{dx} \cos^{-1}x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$

3) $\frac{d}{dx} \tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}$,

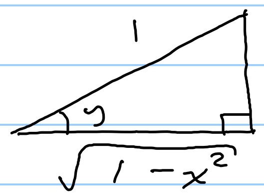
4) $\frac{d}{dx} \cot^{-1}x = \frac{-1}{1+x^2}$,

5) $\frac{d}{dx} \sec^{-1}x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, $|x| > 1$

6) $\frac{d}{dx} \csc^{-1}x = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, $|x| > 1$

PF: 1) Let $y = \sin^{-1} x$, so $\sin y = x$

$\Rightarrow \cos y \cdot \frac{dy}{dx} = 1$



$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3) بالمثل من 1

5) $y = \sec^{-1} x \Rightarrow \sec y = x$

$\Rightarrow \sec y \cdot \tan y \cdot \frac{dy}{dx} = 1$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \cdot \tan y}$ .... $(*)$

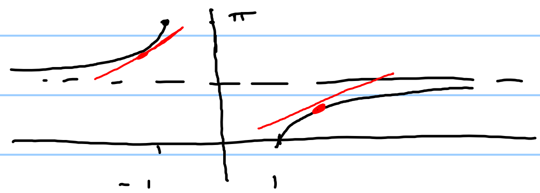
But $\sec y = x$ and $\tan^2 y = \sec^2 y - 1 = x^2 - 1$

$\therefore \tan y = \mp \sqrt{x^2 - 1}$

عوض في $(*)$

$\therefore \frac{d}{dx} \sec^{-1} x = \frac{\mp 1}{x\sqrt{x^2-1}}$,

لاحظ أن مماسات $y = \sec^{-1} x$ دائماً ذات ميل موجب ، لذا



$$\frac{d}{dx} \sec^{-1} x = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, & x > 1 \\ \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}, & x < -1 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$$

اثبات النقاط (2) ، (4) ، (6) يأتي بسهولة من العلاقات

$\cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x$, $\cot^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x$, $\csc^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \sec^{-1} x$

ملحوظة : نستخدم قانون السلسلة لتعميم القوانين السابقة :

1. $$\frac{d(\sin^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}, \quad |u| < 1$$

2. $$\frac{d(\cos^{-1} u)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}, \quad |u| < 1$$

3. $$\frac{d(\tan^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

4. $$\frac{d(\cot^{-1} u)}{dx} = -\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

5. $$\frac{d(\sec^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}, \quad |u| > 1$$

6. $$\frac{d(\csc^{-1} u)}{dx} = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}, \quad |u| > 1$$

Examples: Find $\frac{dy}{dx}$ if

1) $y = \sin^{-1} x^2$

sol: $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} * 2x = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}.$$

2) $y = \tan^{-1}\sqrt{x^2+1}$.

$$y' = \frac{1}{1+(\sqrt{x^2+1})^2} * \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} * 2x = \frac{x}{(2+x^2)\sqrt{x^2+1}}$$

3) $y = \csc^{-1}\left(\frac{3}{x}\right)$

$$y' = \frac{-1}{\left|\frac{3}{x}\right|\sqrt{\left(\frac{3}{x}\right)^2-1}} * \frac{-3}{x^2} = \frac{1}{|x|\sqrt{\frac{9}{x^2}-1}} = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$$

ملحوظة: يمكن حل المثال السابق بملاحظة العلاقة $\csc^{-1}\frac{3}{x} = \sin^{-1}\frac{x}{3}$.

Integration Formulas:

من قوانين الإشتقاق السابقة يمكن استنتاج التكاملات التالية :

1. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$ (Valid for $u^2 < a^2$)

2. $\displaystyle\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$ (Valid for all u)

3. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C$ (Valid for $|u| > a > 0$)

ملحوظة : لاحظ أن $\frac{d}{dx}\cos^{-1}x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ ، وبالتالي يمكن

حساب التكامل $\displaystyle\int \frac{-du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \cos^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$ ، ولكن الأفضل إخراج

الـ − خارج التكامل كالتالي

$$\int \frac{-du}{\sqrt{a^2-u^2}} = -\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = -\sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

مع الأخذ بعين الإعتبار صحة كلا الجوابين لوجود العلاقة :

$$\cos^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}x$$

Examples:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{10 + x^2} = \frac{1}{\sqrt{10}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{10}}\right) + C$

2) $\displaystyle\int_{\frac{-2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1}|x|\Big]_{\frac{-2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}} = \sec^{-1}\sqrt{2} - \sec^{-1}\left|\frac{-2}{\sqrt{3}}\right|$

$$= \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \boxed{\frac{\pi}{12}}$$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}}$

Sol: لحل هذا السؤال يجب بداية إكمال المربع :

$$4x - x^2 = -(x^2 - 4x + 4 - 4)$$
$$= -\left((x-2)^2 - 4\right) = 4 - (x-2)^2$$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4 - (x-2)^2}}$$

$u = x - 2$
$du = dx$

$$= \int \frac{du}{\sqrt{4 - u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) + C$$
$$= \boxed{\sin^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) + C}$$

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 2}$

Sol: Complete a square:

$$4x^2 + 4x + 2 = 4\left(x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + 2$$
$$= 4\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] + 2 = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 1 + 2$$
$$= (2x+1)^2 + 1$$

[طريقة إكمال المربع للصيغة $x^2 + bx$ هي بإضافة $(\frac{1}{2}b)^2$ مربع نصف معامل x ثم طرحه وبالتالي يكون المقدار
$$x^2 + bx + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4}$$]

$$\therefore \int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 2} = \int \frac{dx}{(2x+1)^2 + 1}$$

$u = 2x + 1$
$du = 2dx$
$\frac{1}{2} du = dx$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2 + 1} = \frac{1}{2} \tan^{-1} u + C$$
$$= \boxed{\frac{1}{2} \tan^{-1}(2x+1) + C}$$

5) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2 - 5}} = \int \frac{dx}{2x\sqrt{x^2 - 5/4}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5/4}} \cdot \sec^{-1}\left|\frac{x}{\sqrt{5/4}}\right| + C \qquad \left(a = \sqrt{5/4}\right)$$

$$= \boxed{\frac{1}{\sqrt{5}} \sec^{-1}\left|\frac{2x}{\sqrt{5}}\right| + C}$$

لاحظ أنه يمكن حل المثال 5 بأخذ $u = 2x$ ثم $du = 2dx$ وتحويل التكامل باستخدام التعويض البسيط وفي النهاية نحصل على نفس الجواب والصيغة.

6) $$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} - 6}} = \int \frac{e^x\,dx}{e^x\sqrt{e^{2x} - 6}} \qquad \begin{array}{l} u = e^x \\ du = e^x\,dx \end{array}$$

$$= \int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - 6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sec^{-1}\left|\frac{u}{\sqrt{6}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \sec^{-1}\left|\frac{e^x}{\sqrt{6}}\right| + C = \boxed{\frac{1}{\sqrt{6}} \sec^{-1}\left(\frac{e^x}{\sqrt{6}}\right) + C}$$

موجبة دائماً.

7) $$\int \frac{dy}{\tan^{-1}y\,(1 + y^2)} \qquad \begin{array}{l} u = \tan^{-1}y \\ du = \dfrac{dy}{1 + y^2} \end{array}$$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \boxed{\ln|\tan^{-1}y| + C}$$