7.7. Hyperbolic Funs

Note Title ٢٣/٠٤/٠٢

الدوال الزائدية يتم تعريفها بإستخدام الدالتين $y = e^{x}$ / $y = e^{-x}$ ، وهي دوال لها تطبيقاتها ، وتسمى هذه الدوال بأسماء مشابهة لأسماء الدوال المثلثية ، وذلك لأن الدوال الزائدية لها سلوك وخصائص وعلاقات تشبه تلك المعروفة للدوال المثلثية .

Defs:

1- The hyperbolic cosine of x:

$$\cosh(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \qquad (\text{Kosh of } x)$$

2- The hyperbolic sine of x:

$$\sinh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \qquad (\text{cinsh of } x)$$

3- The hyperbolic tangent of x:

$$\tanh(x) = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

4- The hyperbolic cotangent of x:

$$\coth(x) = \frac{1}{\tanh(x)} = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$$

5- The hyperbolic secant of x:

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^{x} + e^{-x}}$$

6- The hyperbolic cosecant of x.

$$\operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^{x} - e^{-x}}$$

ملحوظات :

١- بإستخدام قوانين تعريفات الدوال الزائدية مباشرة / يمكن الوصول للمتكافئات التالية :

1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

2) $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$

3) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

4) $\cosh^2 x = \dfrac{\cosh 2x + 1}{2}$

5) $\sinh^2 x = \dfrac{\cosh 2x - 1}{2}$

6) $\tanh^2 x = 1 - \operatorname{sech}^2 x$

7) $\coth^2 x = 1 + \operatorname{csch}^2 x$

PF:

1) $\cosh^2 x = \frac{1}{4}\left(e^{2x} + e^{-2x} + 2\right)$

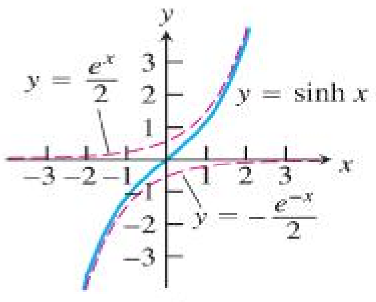
$\sinh^2 x = \frac{1}{4}\left(e^{2x} + e^{-2x} - 2\right)$

$\therefore \cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{1}{4}\left[e^{2x} + e^{-2x} + 2 - e^{2x} - e^{-2x} + 2\right]$

$= \frac{1}{4}[4] = \boxed{1}$

بقية المتكافئات تثبت بالمثل .

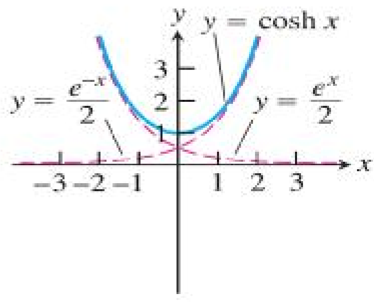
2- المجال والمدى للدوال السابقة يتم استنتاجه من قوانين التعريفات لهذه الدوال.
لذا فإن مجال الدوال الأربعة $\cosh x$ ، $\sinh x$ ، $\tanh x$ ، $\operatorname{sech} x$ هو $\mathbb{R}$ ، بينما مجال الدالتين $\coth x$ ، $\operatorname{csch} x$ هو $\mathbb{R}-\{0\}$.
ويدرس مدى كل دالة على حدى ، مثال ذلك : $y=\cosh x$ مداها هو $[1,\infty)$ لأن $e^{x}+e^{-x}\geq 2$ دائماً . باستخدام تخطيط المنحنيات نحصل على الرسومات التالية:



(a)

Hyperbolic sine:

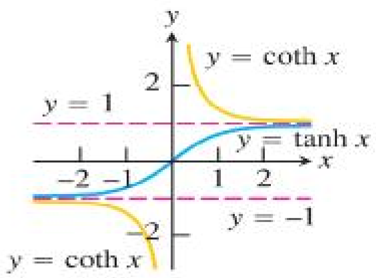
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



(b)

Hyperbolic cosine:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



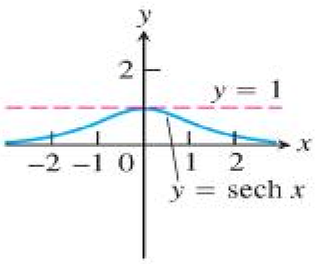
(c)

Hyperbolic tangent:

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Hyperbolic cotangent:

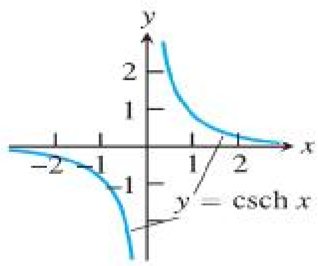
$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$



(d)

Hyperbolic secant:

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$



(e)

Hyperbolic cosecant:

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

Derivatives and Integrals of Hyperbolic Functions

لاحظ من البداية أنه إذا كانت $y=\cosh x=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ ، فإن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} = \sinh x$$

وباستخدام السلسلة نجد أن

$$\frac{d}{dx}\cosh u = \sinh u + C$$

بطريقة مشابهة يمكننا إيجاد مشتقات الدوال الزائدية وتكاملاتها كالتالي:

جدول المشتقات	جدول التكاملات
1) $\frac{d}{dx}(\sinh u) = \cosh u \frac{du}{dx}$	$\int \sinh u \, du = \cosh u + C$
2) $\frac{d}{dx}(\cosh u) = \sinh u \frac{du}{dx}$	$\int \cosh u \, du = \sinh u + C$
3) $\frac{d}{dx}(\tanh u) = \text{sech}^2 u \frac{du}{dx}$	$\int \text{sech}^2 u \, du = \tanh u + C$
4) $\frac{d}{dx}(\coth u) = -\text{csch}^2 u \frac{du}{dx}$	$\int \text{csch}^2 u \, du = -\coth u + C$
5) $\frac{d}{dx}(\text{sech}\, u) = -\text{sech}\, u \tanh u \frac{du}{dx}$	$\int \text{sech}\, u \tanh u \, du = -\text{sech}\, u + C$
6) $\frac{d}{dx}(\text{csch}\, u) = -\text{csch}\, u \coth u \frac{du}{dx}$	$\int \text{csch}\, u \coth u \, du = -\text{csch}\, u + C$

Examples:

1) Find $\frac{dy}{dx}$ if $y = \tanh(\sqrt{1+e^{2x}})$

sol: $y' = \text{sech}^2(\sqrt{1+e^{2x}}) * \frac{1}{2\sqrt{1+e^{2x}}} * e^{2x} * 2$

2) $\int \coth 5x \, dx = \int \frac{\cosh 5x}{\sinh 5x} dx$

$u = \sinh 5x$

$du = \cosh 5x * 5 dx$

$= \frac{1}{5} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{5} \ln|u| + c$

$= \boxed{\frac{1}{5} \ln|\sinh 5x| + C}$

3) $\int \sinh^2 x \, dx = \int \frac{\cosh 2x - 1}{2} dx$

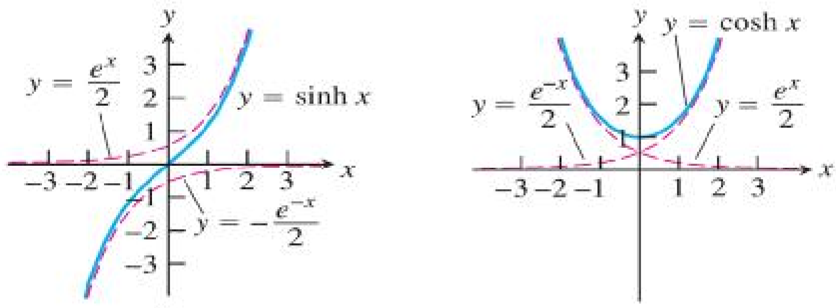
$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sinh 2x}{2} - x\right] + C$

$= \boxed{\frac{\sinh 2x}{4} - \frac{x}{2} + C}$

4) $\int 4e^{x}\sinh x\,dx = \int 4e^{x} * \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\,dx$

$= 2\int e^{2x}-1\,dx = \boxed{e^{2x}-2x+C}$

The Inverse Hyperbolic Funs



(a) (b)

الدالة الزائدية $y=\sinh x$ هي دالة 1-1 مجالها $\mathbb{R}$ ومداها أيضاً $\mathbb{R}$
بينما الدالة الزائدية $y=\cosh x$ ليست 1-1 على $\mathbb{R}$ / لكنها 1-1 على المجال $[0,\infty)$
ويكون المدى $[1,\infty)$. بطريقة مشابهة لما تم في الدوال المثلثية ، عليه
تحديد مجال لكل دالة زائدية لتكون دالة 1-1 ومنه تم تعريف الدوال العكسية.

Defs:

1) $\forall x \in (-\infty,\infty)$, $y=\sinh^{-1}x$ iff $\sinh y = x$, $y \in (-\infty,\infty)$
2) $\forall x \in [1,\infty)$, $y=\cosh^{-1}x$ iff $\cosh y = x$, $y \in [0,\infty)$
3) $\forall x \in (-1,1)$, $y=\tanh^{-1}x$ iff $\tanh y = x$, $y \in (-\infty,\infty)$
4) $\forall |x|>1$, $y=\coth^{-1}x$ iff $\coth y = x$, $y \in \mathbb{R}-\{0\}$
5) $\forall x \in (0,1]$, $y=\operatorname{sech}^{-1}x$ iff $\operatorname{sech} y = x$, $y \in [0,\infty)$
6) $\forall x \in \mathbb{R}-\{0\}$, $y=\operatorname{csch}^{-1}x$ iff $\operatorname{csch} y = x$, $y \in \mathbb{R}-\{0\}$

Thrm:

1) $\operatorname{sech}^{-1}x = \cosh^{-1}\frac{1}{x}$
2) $\operatorname{csch}^{-1}x = \sinh^{-1}\frac{1}{x}$
3) $\coth^{-1}x = \tanh^{-1}\frac{1}{x}$

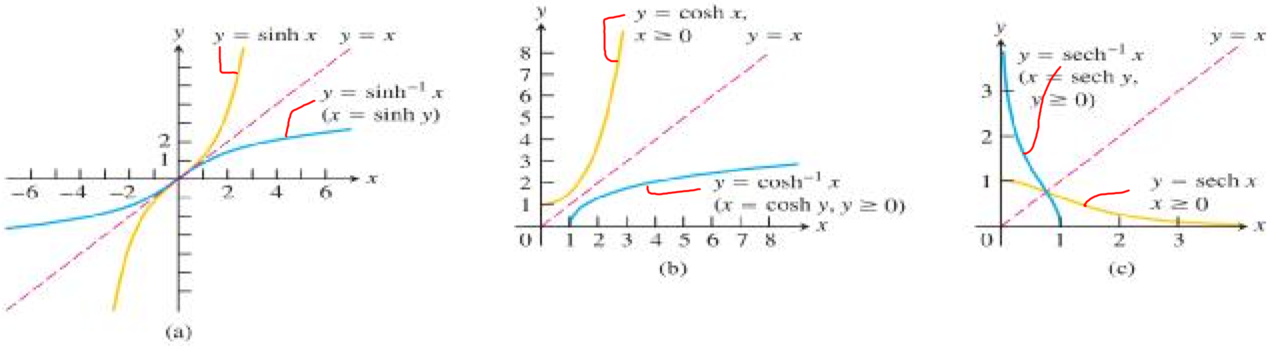
Pf: 1) $y=\operatorname{sech}^{-1}x \Rightarrow \operatorname{sech} y = x$

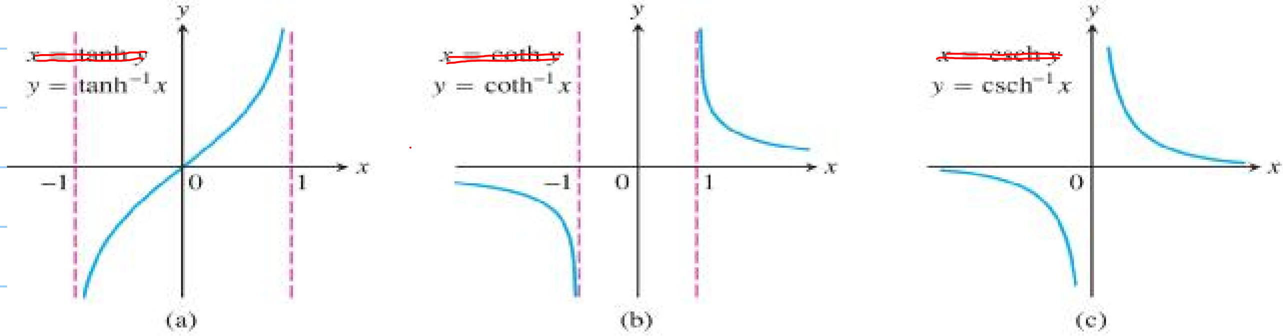
$\therefore \frac{1}{\cosh y} = x$ or $\cosh y = \frac{1}{x}$

$\Longrightarrow y = \cosh^{-1}(\frac{1}{x})$

بقية النقاط تثبت بالمثل.

رسومات الدوال الزائدية العكسية





Derivatives of Inverse Hyperbolic funs

1) $$\frac{d(\sinh^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\frac{du}{dx}$$

2) $$\frac{d(\cosh^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}, \qquad u > 1$$

3) $$\frac{d(\tanh^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx}, \qquad |u| < 1$$

4) $$\frac{d(\coth^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx}, \qquad |u| > 1$$

5) $$\frac{d(\operatorname{sech}^{-1} u)}{dx} = -\frac{1}{u\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}, \qquad 0 < u < 1$$

6) $$\frac{d(\operatorname{csch}^{-1} u)}{dx} = -\frac{1}{|u|\sqrt{1+u^2}}\frac{du}{dx}, \qquad u \neq 0$$

Integrals Leading to Inverse hyp. funs

1. $$\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \sinh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C, \qquad a > 0$$

2. $$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \cosh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C, \qquad u > a > 0$$

3. $$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \begin{cases} \frac{1}{a}\tanh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C, & u^2 < a^2 \\ \frac{1}{a}\coth^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C, & u^2 > a^2 \end{cases}$$

4. $$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a}\operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C, \qquad 0 < u < a$$

5. $$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{1}{a}\operatorname{csch}^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C, \qquad u \neq 0 \text{ and } a > 0$$

Examples:

1) Find $\frac{dy}{dx}$ if $y = \sqrt{\tanh^{-1}(e^{-2x})}$

sol: $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{\tanh^{-1}(e^{-2x})}} * \frac{1}{1-(e^{-2x})^2} * e^{-2x} * -2$$

$$= \frac{-e^{-2x}}{(1-e^{-4x})\sqrt{\tanh^{-1}(e^{-2x})}}.$$

2) Find the value of x where $\sinh x = \frac{-3}{4}$.

sol: Note that $x = \sinh^{-1}\left(\frac{-3}{4}\right)$

يمكن حسابه باستخدام الآلة الحاسبة بالضغط على الأزرار التالية :

$$x = \boxed{\text{shift}} + \boxed{\text{hyp}} + \boxed{\sin} + \boxed{-\tfrac{3}{4}} = -0.69315$$

Now, $\sinh x = -\frac{3}{4} \Longrightarrow$

$$\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \frac{-3}{4} \Longrightarrow e^{2x} - 1 = -\frac{3}{2} e^{x}$$

$\therefore \quad 2e^{2x} + 3e^{x} - 2 = 0$ معادلة تربيعية في e^{x} :

$$\therefore \quad e^{x} = \frac{-3 \mp \sqrt{9 - 4(2)(-2)}}{2 * 2} = \frac{-3 \mp 5}{4}$$

الإشارة السالبة مرفوضة لأنه e^{x} هي دائماً موجبة / لذلك

$$e^{x} = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 = \boxed{-0.69315}$$

3) $\displaystyle\int \frac{2\,dx}{x\sqrt{3 + \ln^2 x}}$ $\qquad u = \ln x$, $\quad du = \frac{1}{x}\,dx$

$$= 2\int \frac{du}{\sqrt{3 + u^2}} = 2\sinh^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$= 2\sinh^{-1}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{3}}\right) + C$$

ملاحظة: يمكن حل مثل هذا التكامل بطريقة أخرى سوف ندرس لاحقاً في sec 8.2 .

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{(\cosh^{-1} x)^2 \sqrt{x^2 - 1}}$ $\qquad u = \cosh^{-1} x$, $\quad du = \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$

$$= \int \frac{du}{u^2} = \frac{-1}{u} + C$$

$$= \boxed{\frac{-1}{\cosh^{-1} x} + C}$$