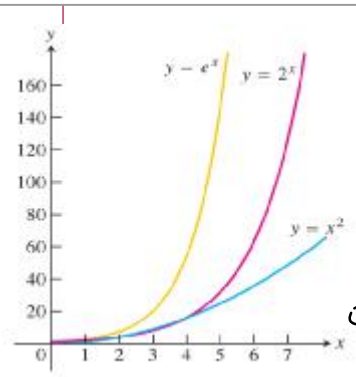
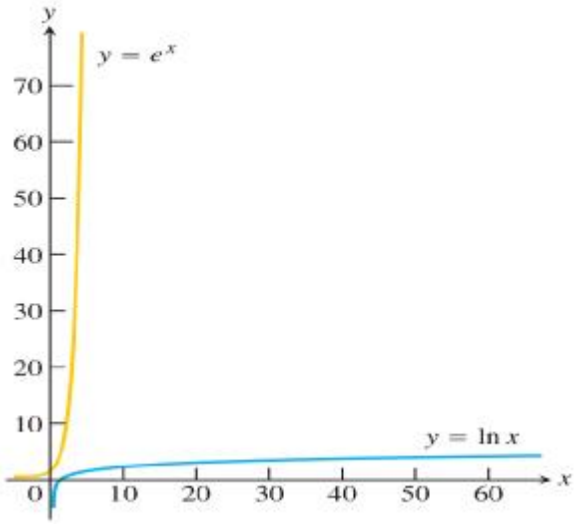
7.8 Relative Rates of Growth :

Note Title ٣٣/٠٤/٠٢



مقدمة : لعلك تلاحظ أنه الدوال الأسية مثل $y=e^x$ / $y=2^x$ تنمو بشكل أسرع مما يحدث مع الحدوديات عندما $x \to \infty$.
والحقيقة أنه نمو الدوال الأسية مثل e^x أسرع من نمو الدالة $y = x^n$ لأي n عدد طبيعي حتى $y = x^{1000000}$. في المقابل فإنه الدوال اللوغاريتمية لها نمو بطيء مقارنة بالحدوديات

ويمكن تلخيص إنطباع عن مفهوم النمو للدوال / خذ الدالتين $y=e^x$ / $y=\ln x$ مع ترقيم محوري x / y بوحدة cm.



وبالأرقام : عندما $x=1$ فإنه $y=e^1 \simeq 3\,cm$

عندما $x=6$ فإنه $y=e^6 \simeq 403\,cm$

عندما $x=10$ فإنه $y=e^{10} \simeq 22\,0m$

عندما $x=24$ فإنه $y=e^{24}\,cm$ وهي مسافة إرتفاع تتعدى نصف المسافة بين الأرض والقمر.

عندما $x=43$ فإنه مسافة الإرتفاع تصل لأقرب نجم لمجموعتنا الشمسية،

في المقابل فإننا إذا أردنا إيجاد قيمة x حتى تصل الدالة $y=\ln x$ للإرتفاع 43 cm لاحظ أنه

$$\ln x = 43 \Rightarrow x = e^{43}$$

وهي نفس المسافة التي تحدثنا عنها قبل قليل / وهي مسافة إذا أردنا قطعها على المحور x إبتداءً من نقطة الأصل وبسرعة الضوء فإننا بحاجة إلى 4.5 سنة تقريباً للوصول للقيمة $x=e^{43}$.

التعريف الرياضي التالي يوضح مفهوم ما معنى أن يكون نمو الدالة $y=f(x)$ أسرع من نمو الدالة $y=g(x)$.

DEFINITION **Rates of Growth as $x \to \infty$**

Let $f(x)$ and $g(x)$ be positive for x sufficiently large.

1. f **grows faster than** g as $x \to \infty$ if

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

or, equivalently, if

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

We also say that g **grows slower than** f as $x \to \infty$.

2. f and g **grow at the same rate** as $x \to \infty$ if

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

where L is finite and positive.

بهذا التعريف / لاحظ أن الدالة $y=2x$ لا تنمو أسرع من $y=x$ لأن

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

وذلك لأن مفهوم أن تكون f أسرع من g أنه عندما تكون x كبيرة جداً فإنه بالمقارنة تكون قيمة $g(x)$ مهملة ولا تذكر مقارنة بقيمة $f(x)$.

Examples: Which of the following pair funs grow faster and which grow at the same rate.

1) $f(x)=x$, $g(x)=1000x$

Sol:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f}{g} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1000x} = \frac{1}{1000},$$

so $f(x)$, $g(x)$ grow at the same rate as $x \to \infty$.

2) $f(x) = e^x$, $g(x) = x^n$ (n is positive integer)

sol: $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{L.R.}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{n\,x^{n-1}} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{L.R}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} \overset{L.R}{=} \cdots$

$\overset{L.R}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{n!\,x^0} = \infty$

so e^x grows faster than x^n for any + integer n.

3) $f(x) = e^x$ and $g(x) = 3^x$

sol:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{3^x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{e}{3}\right)^x = 0$$

[$0 < a < 1$ بس $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$ بما أن $0 < \frac{e}{3} < 1$ لأن]

so e^x grows slower that 3^x as $x \longrightarrow \infty$

4) $f(x) = \ln x$, $g(x) = x$.

sol: $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{L.R}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{1} = 0$

so $f(x) = \ln x$ grows slower than $g(x) = x$ as $x \to \infty$.

5) $f(x) = \sqrt{x^2+5}$, $g(x) = (2\sqrt{x} - 1)^2$

sol:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f}{g} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+5}}{(2\sqrt{x}-1)^2}$$ (بالقسمة على x بسطاً ومقاماً)

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1 + 5/x^2}}{\left(2 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2} = \frac{\sqrt{1}}{2^2} = \frac{1}{4}$$

so f and g grow at the same rate

End of Ch 7