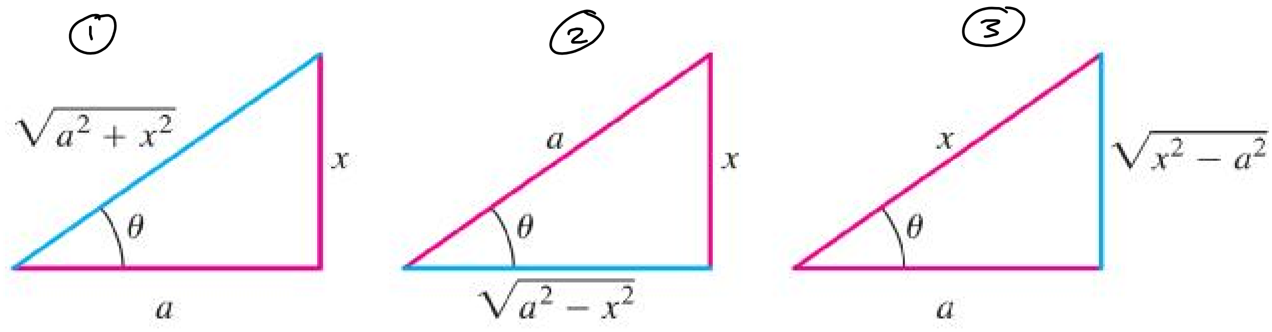
8.3 Trigonometric Substitutions

يستخدم هذا التعويض عندما يحتوي التكامل على إحدى الصيغ الثلاثة التالية:

$$\sqrt{a^2+x^2} , \quad \sqrt{a^2-x^2} , \quad \sqrt{x^2-a^2}$$

وفكرة التعويض المثلثي هو تحويل تكامل يحتوي على x إلى تكامل يحتوي على دالة مثلثية. ولنستفاد طريقة التعويض المثلثي، انظر الرسومات الثلاثة التالية:



$$\frac{x}{a} = \tan\theta \qquad \frac{x}{a} = \sin\theta \qquad \frac{x}{a} = \sec\theta$$

في هذه الحالة يتم اختيار θ في المجال المحدد الذي يجعل الدالة 1-1 حتى نستطيع أخذ $\theta = \tan^{-1}\frac{x}{a}$ في الرسمة الأولى و $\theta = \sin^{-1}\frac{x}{a}$ في الثانية وكذلك في الثالثة.

شرح الطريقة:

① إذا احتوى التكامل على الصيغة $\sqrt{a^2+x^2}$ ، من الرسمة الأولى نأخذ التعويض المثلثي

$$x = a\tan\theta , \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2$$

$$dx = a\sec^2\theta \, d\theta \quad \text{and}$$

$$x^2+a^2 = a^2\tan^2\theta + a^2 = a^2\sec^2\theta$$

$$\sqrt{x^2+a^2} = a\,|\sec\theta| = \boxed{a\sec\theta}$$

② إذا احتوى التكامل على الصيغة $\sqrt{a^2-x^2}$ ، من الرسمة الثانية نأخذ

$$x = a\sin\theta , \quad -\pi/2 \le \theta \le \pi/2$$

$$dx = a\cos\theta \, d\theta \quad \text{and}$$

$$a^2-x^2 = a^2 - a^2\sin^2\theta = a^2\cos^2\theta$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2-x^2} = a\,|\cos\theta| = \boxed{a\cos\theta}$$

③ من الدرجة ③ إذا وجدت الصيغة $\sqrt{x^2-a^2}$ في التكامل / نأخذ التعويض

$$x = a\sec\theta$$

ونأخذ $\theta \in [0, \pi/2)$ وذلك لتسهيل حسابات هذا التعويض

$$\therefore \; dx = a\sec\theta\tan\theta\, d\theta \quad \text{and}$$

$$x^2 - a^2 = a^2\sec^2\theta - a^2 = a^2\tan^2\theta$$

$$\therefore \sqrt{x^2-a^2} = a\,|\tan\theta| = \boxed{a\tan\theta}$$

ملحوظة: بعد حساب التكامل في θ نقوم بإعادة قيمة x باستخدام المثلثات الثلاثة السابقة.

Examples:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$

Sol: حل 1 يمكن حل هذا التكامل باستخدام الدوال الزائدية

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

حل 2 باستخدام التعويض المثلثي

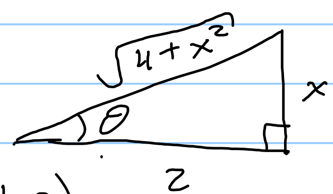
$$x = 2\tan\theta, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2$$

$$\Longrightarrow dx = 2\sec^2\theta\, d\theta \quad \text{and}$$

$$\sqrt{4+x^2} = 2\sec\theta$$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{2\sec\theta}$$

$$= \int \sec\theta\, d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$



$$= \ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2}\right| + C$$

$$= \ln\left|\sqrt{4+x^2} + x\right| + C' \qquad (C' = C - \ln 2)$$

ملحوظة : يمكن بسهولة إثبات أن $\sinh^{-1}x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

وبالتالي فإن

$$\sinh^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) = \ln\left(\frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4}+1}\right) \Longrightarrow$$

$$\sinh^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+C = \ln\left(\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2+4}}{2}\right)+C = \ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right) + C$$

لاحظ أيضاً أنه لأي x ، فإن $\sqrt{x^2+4} > \sqrt{x^2} = |x|$ وبالتالي

فإن $\left|x+\sqrt{x^2+4}\right| = x+\sqrt{x^2+4}$

2) $\int x \sin^{-1}\frac{x}{3}\, dx$

Sol: By Parts: $u = \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$ $\qquad dv = x\,dx$

$$du = \frac{\frac{1}{3}dx}{\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}} = \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

$$\therefore \int x \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) dx = \frac{x^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9-x^2}} \quad \text{---} (*)$$

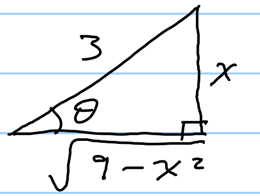
Consider $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9-x^2}}$

$x = 3\sin\theta$, $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

$dx = 3\cos\theta\, d\theta$

$\sqrt{9-x^2} = 3\cos\theta$

$$= \int \frac{9\sin^2\theta \cdot 3\cos\theta\, d\theta}{3\cos\theta}$$



$$= \int 9\sin^2\theta\, d\theta = \frac{9}{2}\int 1-\cos 2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{9}{2}\left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right] + C = \frac{9}{2}\left[\theta - \sin\theta\cos\theta\right] + C$$

$$= \frac{9}{2}\left[\sin^{-1}\frac{x}{3} - \frac{x}{3}\,\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}\right] + C \longrightarrow (*) \text{ عوض في}$$

$$\therefore \int x\sin^{-1}\frac{x}{3}\,dx = \frac{x^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{9}{4}\left[\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{x}{9}\sqrt{9-x^2}\right] + C$$

$$= \boxed{\left(\frac{x^2}{2}-\frac{9}{4}\right)\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{x}{4}\sqrt{9-x^2} + C}$$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-4}}$, $x > \frac{2}{5}$

Sol: بداية يمكن حلها باستخدام الدوال الزائدية كما في مثال ①

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-4}} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-\frac{4}{25}}}$$

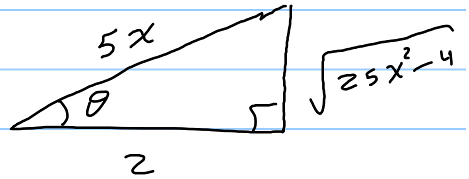
$x = \frac{2}{5}\sec\theta$

$0 \le \theta < \pi/2$

$\therefore dx = \frac{2}{5}\sec\theta . \tan\theta \, d\theta$

$\sqrt{x^2-\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}\tan\theta$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{\cancel{\frac{2}{5}}\sec\theta\,\cancel{\tan\theta}}{\cancel{\frac{2}{5}}\,\cancel{\tan\theta}}\,d\theta$$



$$= \frac{1}{5}\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{5x}{2} + \frac{\sqrt{25x^2-4}}{2}\right| + C$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|5x + \sqrt{25x^2-4}\right| + C$$