مقدمة: نتذكر أنه لإجراء عملية الجمع للدالتين $\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-3}$ يلزمنا توحيد مقامات الدالتين لنحصل على:

$$\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-3} = \frac{2(x-3)+3(x+1)}{(x+1)(x-3)} = \frac{5x-3}{x^2-2x-3}$$

والسؤال هو كيف يمكن عكس العملية الجبرية السابقة لكتابة الدالة $\frac{5x-3}{x^2-2x-3}$ على صورتها كجمع دالتين قبل توحيد المقامات؟!
إن العملية الجبرية المستخدمة لإعادة كتابة دالة ما كحاصل جمع دالتين أو أكثر قبل توحيد المقامات تسمى Partial fractions، وهي طريقة مفيدة في مسائل رياضية كثيرة منها التكاملات، وللتوضيح ندرس المثال التالي:

<u>Example:</u>

$$\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}\,dx$$

نلاحظ في البداية أن التكامل لا يمكن علاجه من خلال الأفكار التي درست سابقاً، وبالتالي يبدو أنه تكامل صعب، لكن إذا استخدمت partial fractions لإعادة كتابة الدالة بصورتها قبل توحيد المقامات، نلاحظ أنه يتحول لتكامل سهل كالتالي:

$$\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}\,dx = \int \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-3}\,dx$$

$$= \boxed{2\ln|x+1| + 3\ln|x-3| + C}$$

Partial Fractions: (الكسور الجزئية)

حتى نستطيع إعادة كتابة دالة كسرية $\frac{f(x)}{g(x)}$ كحاصل جمع كسور جزئية قبل توحيد مقاماتها يجب التأكد بداية من تحقق الشرطين التاليين قبل البدء في العملية:

<u>الشرط الأول</u>: التأكد من أن درجة الحدودية $f(x)$ <u>أقل</u> من درجة الحدودية $g(x)$، وإذا لم يكن الشرط متحققاً، يجب في البداية إجراء القسمة المطولة، ثم عمل partial fractions للباقي من القسمة.

<u>الشرط الثاني</u>: يجب التأكد من أن $g(x)$ يمكن أن تحلل لأكثر من عامل لا يحلل (irreducible factors) وأن تكون هذه العوامل معروفة قبل البدء في الطريقة.

شرح الطريقة : بعد التأكد من تحقق الشرط السابق نتبع الخطوات التالية :

Method of Partial Fractions ($f(x)/g(x)$ Proper)

1. Let $x - r$ be a linear factor of $g(x)$. Suppose that $(x - r)^m$ is the highest power of $x - r$ that divides $g(x)$. Then, to this factor, assign the sum of the m partial fractions:

$$\frac{A_1}{(x-r)} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x-r)^m}.$$

Do this for each distinct linear factor of $g(x)$.

2. Let $x^2 + px + q$ be an irreducible quadratic factor of $g(x)$ so that $x^2 + px + q$ has no real roots. Suppose that $(x^2 + px + q)^n$ is the highest power of this factor that divides $g(x)$. Then, to this factor, assign the sum of the n partial fractions:

$$\frac{B_1x + C_1}{(x^2+px+q)} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{B_nx + C_n}{(x^2+px+q)^n}.$$

Do this for each distinct quadratic factor of $g(x)$.

3. Set the original fraction $f(x)/g(x)$ equal to the sum of all these partial fractions. Clear the resulting equation of fractions and arrange the terms in decreasing powers of x.

4. Equate the coefficients of corresponding powers of x and solve the resulting equations for the undetermined coefficients.

For Example : $\dfrac{5x-3}{x^2-2x-3} = \dfrac{5x-3}{(x-3)(x+1)}$ لاحظ تحقق الشرط

$$= \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{x+1} \overset{\text{توحيد المقامات ومساواة الأطراف}}{=} \frac{A(x+1) + B(x-3)}{(x-3)(x+1)}$$

$$\Longrightarrow \quad 5x-3 = A(x+1) + B(x-3)$$

لاحظ هنا أنه لإيجاد الثابتين A ، B توجد عدة طرق وأفكار / لعل أوضح - ليس أسهلها - هو مساواة حدود يات من خلال معاملات x^n المختلفة وإيجاد معادلات لحلها كما يأتي

$$5x-3 = (A+B)x + (A-3B)$$

$$\Longrightarrow \quad \left.\begin{aligned} A+B &= 5 \\ A-3B &= -3 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{نحل المعادلات}} \boxed{\begin{aligned} A &= 3 \\ B &= 2 \end{aligned}}$$

رغم وضوح الطريقة السابقة / إلا أنه هنالك طرق أسهل يمكن من

حلها ايجاد الثوابت بشكل أسرع كالتالي :

$$5x - 3 = A(x+1) + B(x-3)$$

عوض ب

$\underline{x=-1}$: $\quad -5-3 = A(0) + B(-4) \Rightarrow -8 = -4B$

$$\boxed{B = 2}$$

$\underline{x=3}$: $\quad 15-3 = A(4) + B(0)$

$$12 = 4A \Rightarrow \boxed{A = 3}$$

EXAMPLE 1 Use partial fractions to evaluate

$$\int \frac{x^2 + 4x + 1}{(x-1)(x+1)(x+3)}\, dx.$$

Solution The partial fraction decomposition has the form

$$\frac{x^2 + 4x + 1}{(x-1)(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+3}.$$

To find the values of the undetermined coefficients A, B, and C, we clear fractions and get

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 1 &= A(x+1)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x+1) \\ &= A(x^2 + 4x + 3) + B(x^2 + 2x - 3) + C(x^2 - 1) \\ &= (A + B + C)x^2 + (4A + 2B)x + (3A - 3B - C). \end{aligned}$$

The polynomials on both sides of the above equation are identical, so we equate coefficients of like powers of x, obtaining

$$\begin{aligned} &\text{Coefficient of } x^2: & A + B + C &= 1 \\ &\text{Coefficient of } x^1: & 4A + 2B \phantom{{}+C} &= 4 \\ &\text{Coefficient of } x^0: & 3A - 3B - C &= 1 \end{aligned}$$

There are several ways of solving such a system of linear equations for the unknowns A, B, and C, including elimination of variables or the use of a calculator or computer. Whatever method is used, the solution is $A = 3/4$, $B = 1/2$, and $C = -1/4$. Hence we have

الطريقة السابقة هي طريقة مباشرة وطويلة ، ويمكن تسهيل المسألة دون تكوين معادلات وحلها كالتالي :

$$\frac{x^2+4x+1}{(x-1)(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+3}$$

$$x^2+4x+1 = A(x+1)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x+1)$$

At $x=1$: $6 = 8A \Rightarrow A = \frac{6}{8} = \boxed{\frac{3}{4}}$

At $x=-1$: $-2 = -4B \Longrightarrow B = \boxed{\frac{1}{2}}$

At $x=-3$: $-2 = 8C \Longrightarrow C = \boxed{\frac{-1}{4}}$

$$\therefore \int \frac{x^2+4x+1}{(x-1)(x+1)(x+3)}\,dx = \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+3}$$

$$= \boxed{\frac{3}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln|x+3| + K}$$

لاحظ أنه الثابت K جاء هنا لا يحدث لبس مع الثابت C المستخدم
من عملية الـ P.F.

2) $\int \frac{6x+7}{(x+2)^2}\,dx$

sol:

$$\frac{6x+7}{(x+2)^2} \overset{P.F.}{=} \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x+2)^2} = \frac{A(x+2)+B}{(x+2)^2}$$

$$\Rightarrow \quad 6x+7 = A(x+2) + B$$

At $x=-2$: $\boxed{-5 = B}$

لإيجاد A يمكنك استخدام الأفكار التالية:

1) معامل x هو A وبالتالي $\boxed{A=6}$

2) اشتق الطرفين تحصل على $\boxed{6 = A}$

3) انقل B للطرف الآخر واحذف العامل المشترك $(x+2)$ للطرفين

$$6(x+2) = A(x+2) \Longrightarrow \boxed{A=6}$$

بأي طريقة كانت تحصل على الكسور الجزئية المطلوبة وبالتالي:

$$\int \frac{6x+7}{(x+2)^2}\,dx = \int \frac{6}{x+2}\,dx - \int \frac{5}{(x+2)^2}\,dx$$

$$= \boxed{6\ln|x+2| + \frac{5}{x+2} + C}$$

3) $\displaystyle\int \frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3}\,dx$

رغم أنه المقام $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$ يحلل لعوامل إلا أنه الشرط الأول وهو درجة حدودية البسط : أقل من درجة حدودية المقام غير متحقق ، وبالتالي لا يصح البدء بإيجاد الكسور الجزئية إلا بعد إجراء القسمة المطولة ، والحصول على خارج قسمة وباقي :

$$\begin{array}{r|l} & 2x \\ \hline x^2-2x-3 & 2x^3 - 4x^2 - x - 3 \\ & \mp 2x^3 \pm 4x^2 \pm 6x \\ \hline & 0 \quad\ 0 \quad 5x - 3 \end{array}$$

$\therefore$

$$\frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3} = 2x + \frac{5x-3}{(x-3)(x+1)}$$

$$\stackrel{P.F.}{=} 2x + \frac{3}{x-3} + \frac{2}{x+1}$$ (تم حله سابقاً)

$\therefore$

$$\int \frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3}\,dx = \int 2x\,dx + \int \frac{3}{x-3}\,dx + \int \frac{2}{x+1}\,dx$$

$$= \boxed{x^2 + 3\ln|x-3| + 2\ln|x+1| + C}$$

4) $\displaystyle\int \frac{4-2x}{(x^2+1)(x-1)^2}\,dx$

Sol:

$$\frac{4-2x}{(x^2+1)(x-1)^2} \stackrel{P.F.}{=} \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2}$$

$$\Longrightarrow 4-2x = (Ax+B)(x-1)^2 + C(x-1)(x^2+1) + D(x^2+1)$$

At $x=1$: $\quad 2 = 2D \Longrightarrow \boxed{D=1}$

انقل $D(x^2+1)$ للطرف الأيسر

$$4-2x-x^2-1=(x-1)\left[(Ax+B)(x-1)+C(x^2+1)\right]$$

[الهدف هنا أخذ $(x-1)$ عامل مشترك من الطرف الأيمن واختصاره مع $x-1$ من الطرف الأيسر، وهنا يجب الانتباه أنه إذا كانت صيغة الكسور الجزئية التي تمت كتابتها من البداية صحيحة فإنه $x-1$ يجب أن يكون عامل من الطرف الأيسر]

$$-(x+3)\cancel{(x-1)}=\cancel{(x-1)}\left[(Ax+B)(x-1)+C(x^2+1)\right]$$

$$\Longrightarrow \quad -(x+3)=(Ax+B)(x-1)+C(x^2+1)$$

At $x=1$: $\quad -4 = 2C \Longrightarrow \boxed{C=-2}$

مرة أخرى انقل $C(x^2+1)=-2(x^2+1)$ للطرف الأيسر بهدف اختصار $x-1$ معامل مشترك للطرفين نحصل على

$$-x-3+2x^2+2=(Ax+B)(x-1)$$

$$2x^2-x-1=(2x+1)\cancel{(x-1)}=(Ax+B)\cancel{(x-1)}$$

$$\Longrightarrow \quad Ax+B=2x+1 \Longrightarrow \boxed{A=2} \text{ and } \boxed{B=1}$$

$\therefore$

$$\int \frac{4-2x}{(x^2+1)(x-1)^2}\,dx=\int \frac{2x+1}{x^2+1}-\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\,dx$$

$$=\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx+\int\frac{dx}{x^2+1}-2\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$=\boxed{\ln|x^2+1|+\tan^{-1}x-2\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+K}$$

ملحوظة: يمكن إيجاد ثوابت الكسور الجزئية والتي تسمى undetermined coefficients بتكوين جدولية من الطرفين ومساواة المعاملات والحصول على 4 معادلات بـ 4 مجاهيل / وهي عملية طويلة ومرهقة /

$$-2x + 4 = (Ax + B)(x - 1)^2 + C(x - 1)(x^2 + 1) + D(x^2 + 1)$$
$$= (A + C)x^3 + (-2A + B - C + D)x^2$$
$$+ (A - 2B + C)x + (B - C + D).$$

Equating coefficients of like terms gives

Coefficients of x^3:	$0 = A + C$
Coefficients of x^2:	$0 = -2A + B - C + D$
Coefficients of x^1:	$-2 = A - 2B + C$
Coefficients of x^0:	$4 = B - C + D$

We solve these equations simultaneously to find the values of A, B, C, and D:

$-4 = -2A, \quad A = 2$	Subtract fourth equation from second.
$C = -A = -2$	From the first equation
$B = (A + C + 2)/2 = 1$	From the third equation and $C = -A$
$D = 4 - B + C = 1.$	From the fourth equation

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$

Sol: $\displaystyle\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$

$\Rightarrow \quad 1 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)\,x\,(x^2+1) + (Dx+E)\,x$

At $x=0$: $\boxed{1 = A}$

انقل $A(x^2+1)^2$ للطرف الأيسر، بإختصار x عامل من الطرفين

$1-(x^2+1)^2 = x\left[(Bx+C)(x^2+1) + (Dx+E)\right]$

$\Rightarrow$

$1-\left[x^4+2x^2+1\right] = x\left[(Bx+C)(x^2+1) + (Dx+E)\right]$

$\cancel{x}(-x^3-2x) = \cancel{x}\left[(Bx+C)(x^2+1) + (Dx+E)\right]$

$= Bx^3 + Bx + Cx^2 + C + Dx + E$

$= Bx^3 + Cx^2 + (B+D)x + (C+E)$

$\Rightarrow \boxed{B=-1}, \quad \boxed{C=0}, \quad \boxed{E=0} \qquad B+D=-2 \Rightarrow \boxed{D=-1}$

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x\,dx}{x^2+1} - \int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$$

$$= \ln|x| - \tfrac{1}{2}\ln|x^2+1| + \frac{1}{2(x^2+1)} + K$$

$$= \boxed{\ln \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{2(x^2+1)} + K}$$

ملحوظة-١: في مسائل أخرى / عندما يكون الثابت $E \neq 0$ ونحصل على تكامل الحد $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ ، نستخدم لحله التعويض المثلثي .

$$6)\ \int \frac{x+4}{x^3+3x^2-10x}\,dx$$

sol: $x^3+3x^2-10x = x(x^2+3x-10) = x(x+5)(x-2)$

$\therefore$

$$\frac{x+4}{x(x+5)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+5} + \frac{C}{x-2}$$

$$\Rightarrow x+4 = A(x+5)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+5)$$

At $x=0$: $\quad 4 = -10A \Rightarrow \boxed{A = \frac{-2}{5}}$

At $x=-5$: $\quad -1 = 35B \Rightarrow \boxed{B = \frac{-1}{35}}$

At $x=2$: $\quad 6 = 14C \Rightarrow \boxed{C = \frac{3}{7}}$

$$\therefore \int \frac{x+4}{x(x+5)(x-2)}\,dx = -\frac{2}{5}\ln|x| - \frac{1}{35}\ln|x+5| + \frac{3}{7}\ln|x-2| + K$$

ملحوظة: في الحالات عندما تكون الكسور الجزئية بالشكل

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g(x)}{(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n)} = \frac{A_1}{(x-r_1)} + \cdots + \frac{A_n}{(x-r_n)}$$

فإنه بالإمكان الحصول على A_i مباشرةً بتعويض $\frac{g(x)(x-r_i)}{f(x)}$ عند $x=r_i$ كالتالي

$$A_i = \frac{g(r_i)(x-r_i)}{f(r_i)}$$

نفس المثال السابق / لاحظ أن

$$\frac{x+4}{x(x+5)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+5} + \frac{C}{x-2}$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{0+4}{(0+5)(0-2)} = \frac{4}{-10} = -\frac{2}{5}$$

$$B = \frac{-5+4}{-5(-5-2)} = \frac{-1}{35} \quad , \text{ and}$$

$$C = \frac{2+4}{2(2+5)} = \frac{6}{14} = \boxed{\frac{3}{7}}$$

7) $\displaystyle\int \frac{x-1}{(x+1)^3}\, dx$

$$\frac{x-1}{(x+1)^3} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}$$

$$\Rightarrow \quad x-1 = A(x+1)^2 + B(x+1) + C$$

at $x=-1$: $\boxed{-2 = C}$

اشتق الطرفين

$$1 = 2A(x+1) + B$$

at $x=-1$: $\boxed{1 = B}$

اشتق مرة أخرى

$$0 = 2A \Longrightarrow \boxed{A = 0}$$

$$\therefore \int \frac{x-1}{(x+1)^2}\, dx = \int \frac{dx}{(x+1)^2} - 2\int \frac{dx}{(x+1)^3}$$

$$= \boxed{\frac{-1}{(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} + K}$$