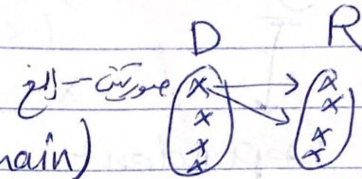
اقتران **Function**

$f(x)$ : Rule

ق(س)

$\textcircled{x} \xrightarrow{} \textcircled{y}$

شغل (علاقة)



$x$ : input (Domain)

المجال

$y$ : output (Range / coDomain)

لكن $f$ ،
كل نقطة لها صورة
واحدة

$f(x) : D \xrightarrow{Rule} R$

$x \in D \xrightarrow{Rule} y \in R$

D كل متغيرات

$y = f(x)$ $\qquad x \in D$

(ص = ق(س)) $\qquad$ (each $x$ in $D$)

(Domain) D: inputs $x$ $\rightarrow$ (شو $x$ المسموحة
؟؟
وهكذا)

(Range) R: outputs $y$

$f(x) = x + 10$ $\qquad$ مش قيود على $x$

Domain $\Leftrightarrow$ ; $\mathbb{R}$ (Real numbers).

$f(x) = \sqrt{x}$

Domain $\Leftrightarrow$ ; $x \geq 0$

$f(x) = \dfrac{1}{x}$

Domain $\Leftrightarrow$ ; $x \neq 0$ $\qquad$ كل الأعداد
عدا الصفر

متغير مستقل

→ independent variable

$y = f(x)$

$y$ ↓ Dependent variable

(متغير ثابت)

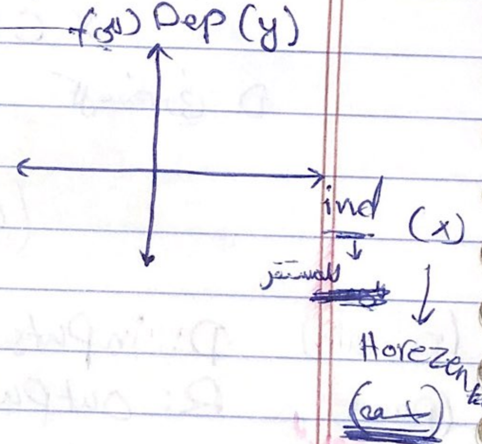
يعني $y$ (صورة $x$)

← $y$ يعتمد على $x$

$p = f(q)$

← $p$ يعتمد على $q$

العلاقة العالمية تعتمد على الدراسة مش العكس




---

* Linear Equations (2 variables)
(بمتغيرين)

(شكلها) ∮ General form : $Ax + By + C = 0$

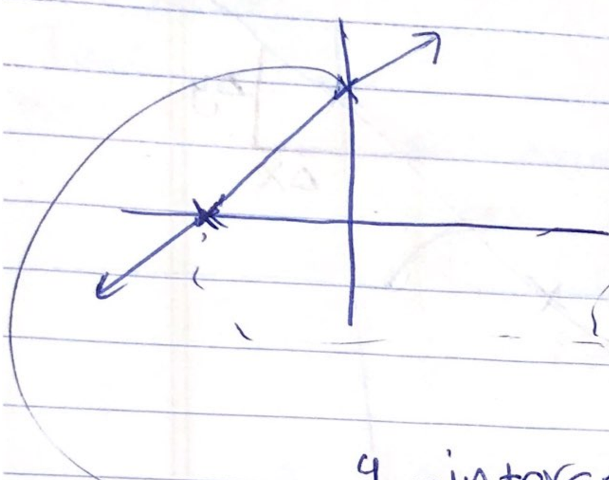
$(A, B, C)$ : constants ثوابت

وحدة منهم $(A, B) \neq 0$

إذا بدي solution ← مش بالحل، بالتعويض لأنها معادلة وحدة

⇐ بفرض قيمة لـ $y$ ، ومنها أوجد $x$ والعكس

Graph : (straight) line →
(2 points)



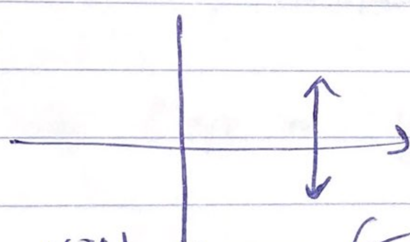
intercepts : نقاط تقاطع

x-intercepts : وين نقاط تقاطع مع 0 → $(x, 0)$

y-intercept : $(0, y)$

Graph : line (2 points عشان نرسم خط)

x, y - intercepts



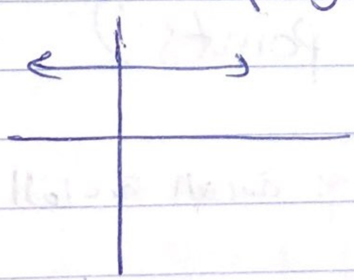
* vertical line : عمودي

x ثابتة (y بتغير)

no slope

because $\Delta x = 0$

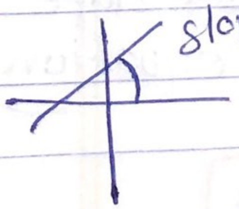
المقام ≠ صفر ← (الميل غير معرّف)



* Horizantal

$y = b$

(slope = 0)

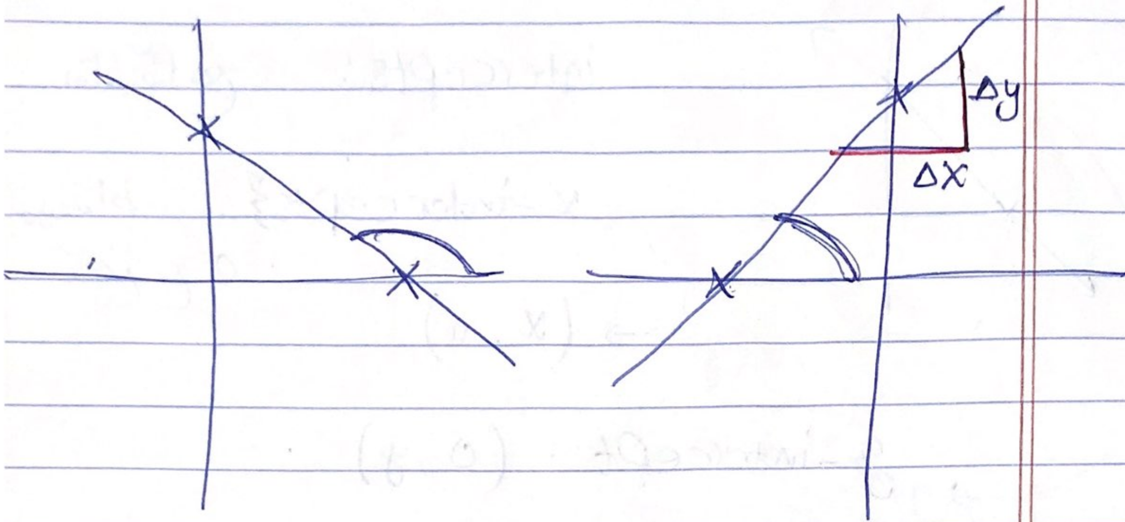


slope = +

slope = −

منفرجة

slope : الفرق بينهم




$\Delta y = y_2 - y_1$

$\Delta x = x_2 - x_1$

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ = slope.

مراجعة

$Ax + By + C = 0$

Graph : Line (2 points).

القاعدة العامة : لازم أعرف نقطتين علشان أعرف المعادلة.

* Point $(x, y)$ و slope m (point slope equation)

$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$

الميل

* 2 points : $\boxed{\text{find slope } \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)}$
* y intercept $(0, b)$ , slope m

$\Rightarrow \boxed{y = mx + b}$

Sep 10th. 19
Tues

مراجعة:

Linear equation: $Ax + By + C = 0$

* 2 Points $(x, 0) \rightarrow$ x-intercept
  $(0, y) \rightarrow$ y-intercept
  slope $= \frac{\Delta y}{\Delta x}$ $(\Delta x \neq 0)$.

* Point: $P_1(x_1, y_1)$, slop $= m$
  $\rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$.

* 2 Points: $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$
  $m_1$, $P_1$

نوجد الميل $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ ونعوض بنقطة $(P_2$ or $P_1)$.

* Slope $m$, y-intercept $(b)$
  $\rightarrow (0, b)$

$\Rightarrow y = \underset{\text{slope}}{m}x + \underset{\text{y-int}}{b}$

Linear function

$y = f(x) = mx + b$

# 1.6 Applications of functions in Business and Economics (Linear)

Production input → output

(x) = # of units.

cost — revenue — Profit

$C(x)$ — $R(x)$ — $P(x)$

$C(x)$: يعتمد على عدد الوحدات (x) — ~~ind~~-variable (أهم شرحة) — $\geq 0$

$R(x)$: dependent — يعتمد على المنتج والبيع — $\geq 0$

$P(x)$: الفرق مابين Revenue وال cost

$>0$ Profit ربح

$<0$ loss خسارة

$=0$ → لاحقاً

C يعتمد على x

---

## The total Cost function $C(x)$

(F.C) fixed costs

التكاليف الثابتة

اللي مندفعها بدون

لما يكون فش إنتاج

$\Rightarrow C(0)$

variable costs (V.C)

# of units Produced (x)

(تعتمد على x).

cost per unit (m)

$(V.C) = (\text{cost per unit})(\#\text{ of units})$

$$\boxed{V.C = mx}$$

Total cost $= T.C = V.C + F.C$

**Model** $\boxed{C(x) = m\cancel{x} + b}$

نفس معادلة الخط في الأول .

fixed costs ثابت

(slope) = cost per unit

$(mx)$

هون لنا معادلة اقتصادية .

Ex :- if $C(x) = 20x + 1000$

1) : slope $\equiv 20$ (cost per unit)

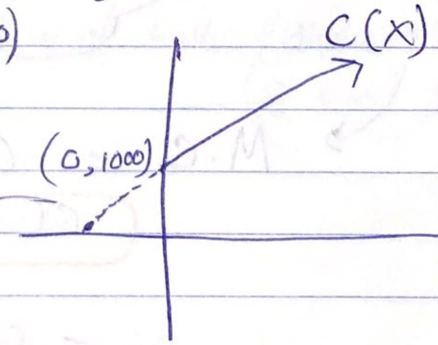
What's y-int ?

$\Rightarrow C(0) = 1000$

$= \text{fixed costs}$ .

2) Graph : we need x, y-int

$\Rightarrow (0, 1000)$




ما منمشي لأنه فش سالب

x = # of units . $\boxed{x \geq 0}$

3) find $C(50)$ → The cost of reducing $= 50$ :معناها

$\rightarrow C(50) = (20 \times 50) + 1000$

$= \underbrace{1000}_{V.C} + \underbrace{1000}_{F.C}$

$T.C = V.C + F.C$

$= 2000\ \$$

4) $C(51) = (20 \times 51) + 1000$

$= \$1020 + \underline{1000}$

$= \$2020$ fixed

للإنتاج

5) $C(51) - C(50)$

$= 2020 - 2000$

$= \$20$

للتحقق:

$C(101) - C(100) = \underline{20}$ → constant ≡ linear

cost per unit

Δ لكل وحدة ( عدد ثابت الي رح يزيد )

بس مش دائماً ثابت عندما يكون Linear

⇒ The marginal cost (التكلفة الحدية)

≡ The cost of producing one extra unit at any level of production.

لها علاقة بحد واحد

$$M.C = C(X+1) - C(X)$$

C( عدد ) - C ( الي قبله )

= slope

= cost per units.

$$C(X) = mX + b$$

fixed cost

slope : بلغة الرياضيات

# of units : بالاقتصاد

= M.C

Revenue : (تعتمد على عدد المبيعات (الوحدات)

$\Rightarrow$ Total revenue : $R(x)$

(R تعتمد على x)

يعتمد على

# of units (produced and sold)

المنتج والمباع .

$x$

selling price per unit .

$p$

$\boxed{R(x) = px}$

$x \geq 0$ always

( $R(x) =$ عدد الوحدات المباعة $x$ سعر كل وحدة )

Ex: let $R(x) = 30x$

$p$ , # of units (produced & sold)

$\boxed{R(0) = 0}$ no production = no revenue

slope = price per unit = 30

$R(20) = 30 \times 20 = \$600$

$R(21) = \$630$

$R(21) - R(20) = \$30$

التفسير: إذا كنت منتج 20 وحدة وانتقلت للوحدة 21

هاي رح تزيد على revenue : \$30

$\overline{M.R} = \text{slope}$

Linear = Revenue لما يكون

$\Rightarrow \overline{M.R} = \text{constant}$.

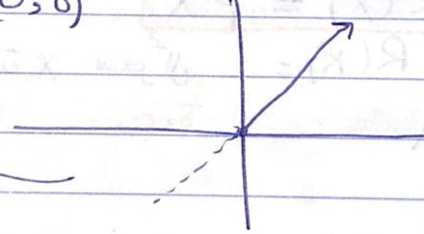
Total profit $P(x)$

Profit = Revenue - Cost

$P(x) = R(x) - C(x)$.

$R(0) = 0 \rightarrow (0,0)$

# of units ⊕



Ex: $C(x) = 20x + 1000$ f.c $C(0)$

$R(x) = \underset{\text{slop} = \overline{MR}}{\underline{30}}x$

$\Rightarrow P(x) = (30x) - \left((20x) + 1000\right)$

$= (10x) - 1000$

$P(x) = 10x - 1000$

slope = $\overline{MR}$

Linear عشان

$P(x) = (10x) - 1000$

$C(6) - C(5) = \$10$ =slope

slope ذاته =marginal profit.

$P(20) = (10 \times 20) - 1000$

$= -800 < 0$

النتيجة cost > Revenue ⇒ loss.

$P(120) = (10 \times 120) - 1000$

$= \$200 > 0$ ⇒ Profit

النتيجة cost < Revenue.

$P(100) = (10 \times 100) - 1000$

$= \$0$ ⇒ no Profit no loss

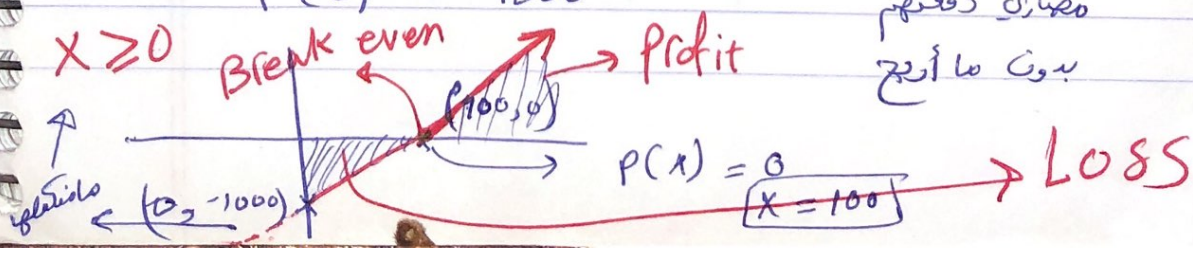
النتيجة Revenue = cost.

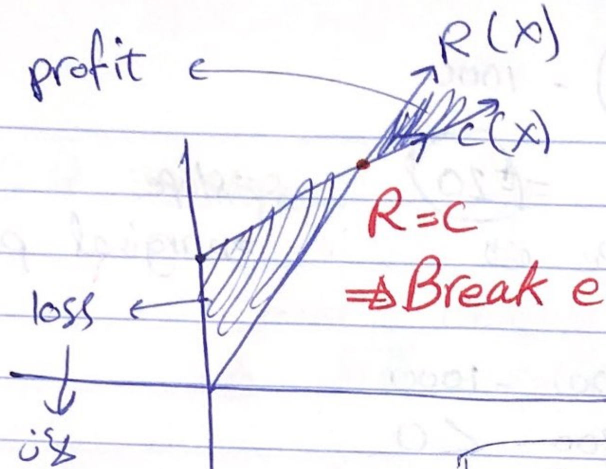
⇒ Break Even : $P(x) = 0$, $R(x) = C(x)$

$P(x) = 10x - 1000$ مش عشوائي → fixed costs.

$P(0) = -1000$

مصاري دفعتهم بدون ما أربح






رسمة ثانية

$R = C$

$\Rightarrow$ Break even .

$C(x) > R(x)$

$P(x) = R(x) - C(x)$

Break even point

$\equiv R = C$

$(X, R(x))$

or

$(X, C(x))$

(في المثال التالي) .

* دائماً:

$X =$ الكمية

$Y =$ السعر

V. important .

هاد الحكي

Sep 12th, 19
Thursday.

Ex: $\boxed{\begin{matrix} Q \\ 11 \end{matrix}}$ / Page 113 :

200 units → \$3100
250 units → \$6000
→ write profit function -

A: linear → : slope & point , 2points , .....
⇒ 2 points : (200, 3100)
(250, 6000)

$$\Rightarrow \text{slope} = \text{Marginal profit} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$= \frac{6000 - 3100}{250 - 200} = \frac{2900}{50} = \cancel{\$}\ 58$$

بنعوض بنقطة (المعادلة) .

$$P - P_1 = m(X - X_1)$$
مثلاً ←

$$P - 3100 = 58(X - 200)$$
$$P = 58X - \underbrace{8500}_{\text{fixed cost}}$$

P(X) = 0 ⇒ # of units to break even
(إضافة)

لما Break even بيصير هنا
P(X) = 0 .

طرفين :

Producers (suppliers) , Consumers (customers) | * فكرة المستهلك :

كمان طرفين :

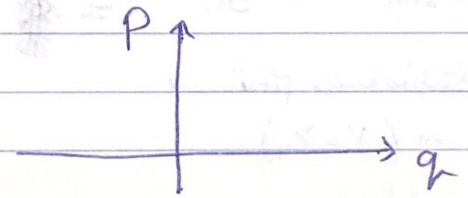
Demand , supply

Price (p)
quantity (q) } $\Rightarrow p = f(q)$ طريقة الكتاب

البرايس بيعتمد على الكوانتيتي ← رياضياً .

بس في الواقع العكس

→ Graph : Horizantal : q



* Low of Demand : The relationship between price and quantity is negative . (عكسية)

customers

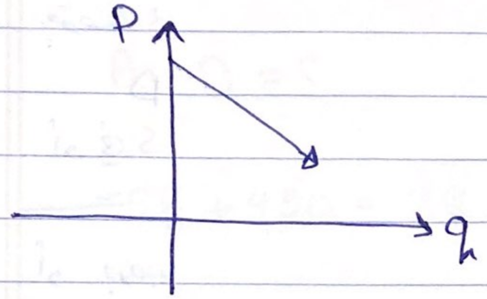
$\Rightarrow$ p increases → demand decreases .
p decreases → " increases .

* Low of supply : The relationship between p & q is positive (طردية)

إذا العلاقة خطية ← قانون ال Demand أو الاقتران : يكون الميل

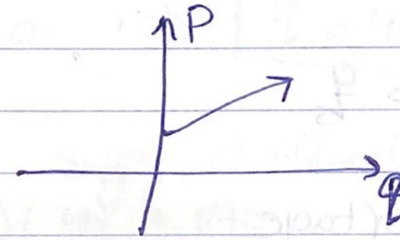
سالب ؛

(خط مستقيم)



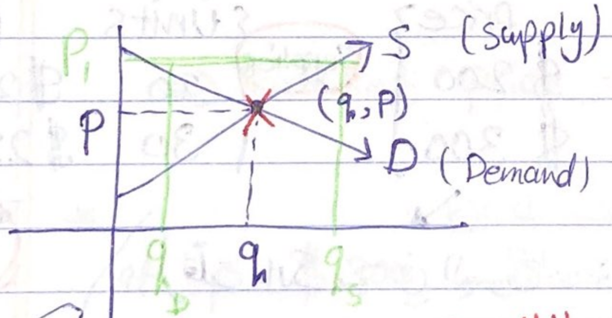

negative slope

Supply :




Positive slope

اقتران ال supply : خط مستقيم ميله موجب.




حل يرضي الطرفين :

(ال customer بدو أقل كمية بأقل سعر ، وال supplier عكسه)

equilibrium point (q , P).

$\Rightarrow D = S$

$P \equiv$ equilibrium price.

$\equiv$ market price.

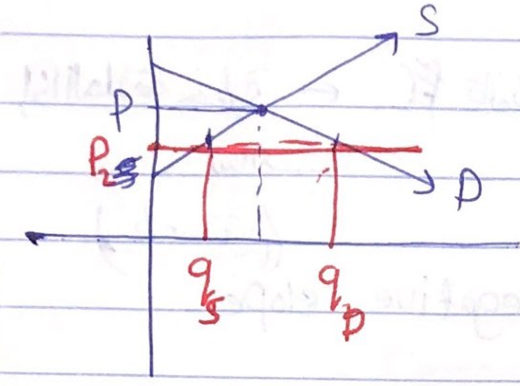
$q \equiv$ ~~equibli~~ equilibrium quantity.

$P_1 > P \Rightarrow$ Surplus (فائض)

$q_s > q_D$

∴ الزبون مش راضي

(رح يصير مش راضي).




باخد السعر
بعوضه في
D
أو في S

أو بوجد
market price
⇓
ويحكم إذا
فائض أو نقص.

$P_2 < P$

$q_D > q_s$

$\Rightarrow$ Shortage.

Ex: 5/110

| Demand | Units | price | Suppliers | units | Price |
|---|---|---|---|---|---|
| | 50 | \$ 200 | | 20 | \$ 210 |
| | 30 | \$ 300 | | 30 | \$ 230 |

علاقة عكسية

علاقة طردية

(قلت الكمية في السوق ∴ السعر رح يرتفع).

find supply and demand function.

A: $\text{Slope} = \frac{\Delta P}{\Delta q}$

لازم الميل سالب دائماً

$= \frac{300-200}{30-50} = \boxed{-5}$

$\Rightarrow P - P_1 = m(q - q_1)$

التحقق: منعوض نقطة

$P - 200 = -5(q - 50)$

$\boxed{P = 450 - 5q}$

$\text{slope} = \frac{230-210}{30-10}$

$= \frac{20}{10} = 2$

الميل لازم (+)

$\Rightarrow P - 210 = 2(q - 20)$

$\boxed{P = 2q + 170}$

$q = x$
أحياناً في الكتاب

تكملة

equilibrium point : ( Eq . Point )

A: D = S

بالحذف أو بالتعويض. (بتربط أسهل هون)

$-5q + 450 = 2q + 170$

$7q = 280 \Rightarrow \boxed{q = 40}$

$\Rightarrow P$ : بعوضها في معادلة ال supply

$p = (2)(40) + 170 = \boxed{250}$

Eq. Point : (40, 250)

$\Rightarrow$ market price = 250 (المقطع الصادي)

* هاد مش موجود بالمثال :

at $p = \$300$, Shortage ? or surplus ?

مقارنة ه أو من Eq.p (250)

$p = \$300 >$ eq. price → ال supplier راضي

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{surplus}}$

Ex: 45/115

D: $2p = -q + 56$ بناطريقة سريعة

S: $3P - q = 34$

A: ( D=S ) Eq عشان أوجد بالحذف أو التعويض

Eq: $2p + \cancel{q} = 56$

$+ \quad 3P - \cancel{q} = 34$

$5p = 90$

$\Rightarrow P = \frac{90}{5} = \boxed{18}$ بتعويضها في D

$q = 56 - 2P$

$q = 56 - 36 = \boxed{20}$

Eq. point $(\overset{q}{20}, \overset{p}{18})$.

$q = 56 - 2P$ طريقة أسهل:

$q = -34 + 3P$

$\therefore \; 56 - 2P = -34 + 3P$

$5P = 90 \rightarrow \boxed{P = 20}$

etc.

# Revision

## Applications of functions in Business and Economic (1.6)

⇒ (Linears)

### Production

**1. Cost** $C(x)$

- * Dependent variable
- * $\geq 0$
- * يعتمد على عدد الوحدات $(x)$

يعتمد على

- **Fixed costs (F.C)**
  - التكاليف الثابتة إلي مندفعها لما ما يكون في إنتاج
  - $\Rightarrow \boxed{C(0)}$
- **Variable costs (V.C)**
  - # of units Produced $(x)$
  - cost Per unit $(m)$
  - $\Rightarrow \boxed{V.C = mx}$

Total cost $\boxed{C(x)} = (V.C) + (F.C)$

$= mx + b$

**2. Revenue** $R(x)$

- * Dependent variable
- * $\geq 0$
- * يعتمد على المنتج والمبيع

يعتمد على

- # of units (Produced and sold) $(x)$
- selling Price Per unit $(p)$ $(\geq 0)$

$\boxed{\Rightarrow R(x) = px}$

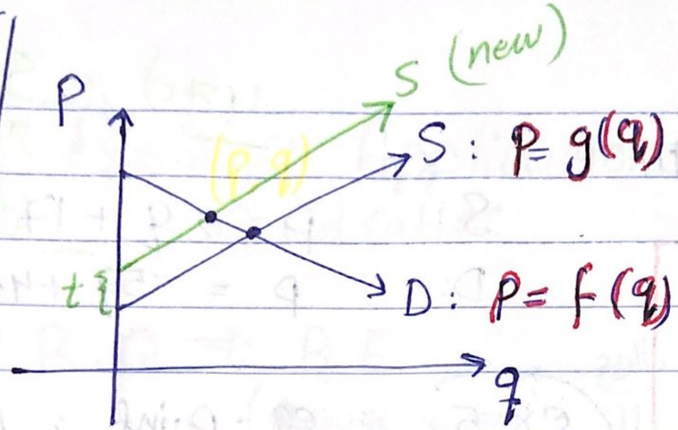
**3. Profit** $P(x)$

- * وهو الفرق ما بين اقتران العائدات $(R(x))$ واقتران الثمن $(C(x))$

$\Rightarrow P(x) = R(x) - C(x)$

- * $> 0$ Profit
- $< 0$ loss

Sep 17,19
Tuesday




$p = f(q)$

S+D   Tax and ~~equilib~~ equilibrium point

Let $t \equiv$ tax in \$

الزبون بيضيف الضريبة على كل مرحلة .

Supply ⇒ new supply function
⇓
shift ( $t$ = مقدار)
(منحنى (أو اقتران) ال S رح يرتفع لفوق) .

عشان نعمل shift ، لازم يكون $p = g(q)$ (بهاي الصورة)
⇐ نخلي p موضوع للقانون ومعاملها = 1
(solve the equation for p)

⇒ New equilibrium point : $S_{new}$ = Demand

الضريبة بتأثر على ال supplier
عشان هيك الإزاحة بتكون لل S .

v.imp

بالكتاب (170)

Ex : 6 / 111

S: $p = 2q + 170$

D: $p = -5q + 450$

$2p + q = 15$

$P = \frac{15 - q}{2}$

الميل = معامل $q$

= سالب

Demand ∴

∴ $2p + q = 15$

اقتران Demand

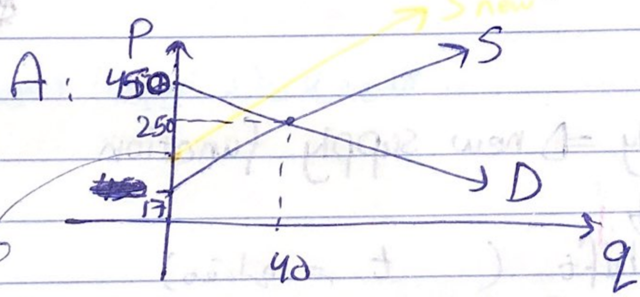
أو من خلال الرسم

نعرف

ex 5 : eq. point : (40, 250)

Tax $t = \$14$ per unit

⇒ find the new eq. point.




Amara

بالاقتصاد :

أقل سعر يمكن يقبل فيه

supplier

$S_{new}$: $p = (2q + 17) + 14$

New eq. point : $S_{new} = D$

$\Rightarrow \quad 2q + 31 = -5q + 450$

$7q = 419$

$\Rightarrow q = 59.8$

ومنها :

$p = (2 \times 59.8) + 31$

$= 150.6$

⇒ New eq. point $(59.8, 150.6)$.

# $\boxed{2.3}$ Business Applications Using Quadratics

C.R.P ⇒ B.E (Break even — السعر والعائدات والربح مرتبطين مع ال)

S.D ⇒ Eq. point (نفس الشرح).

$f(x) = mx + b$ ⇒ linear function

$(= C(x))$

New $f(x) = ax^2 + bx + c$

د(س) = أ س² + ب س + جـ .

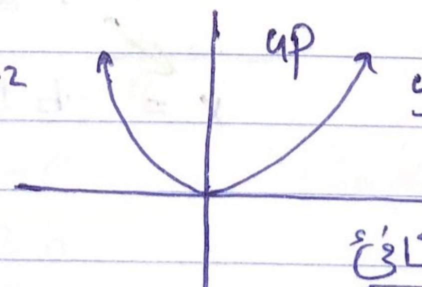
⇒ Quadratic function (اقتران تربيعي)

أو: كثير حدود من الدرجة الثانية.

$a \neq 0$

(بصير خطي)

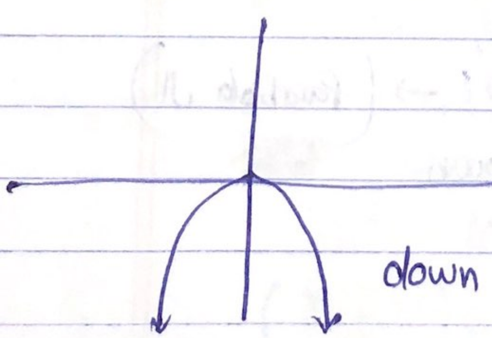
الرسمة الأساسية ⇐ $f(x) = x^2$




$y = f(x) = x^2$

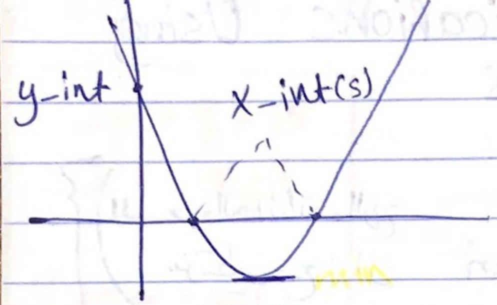
اسم الرسمة: قطع مكافئ

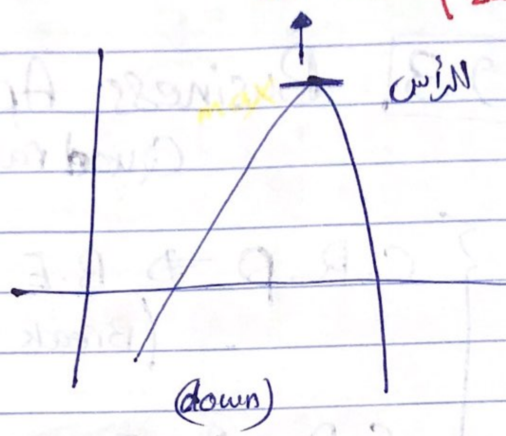
Parabola




$f(x) = -x^2$

vertex : $\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$




Vertex (up)

$\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$

---

Vertex : $\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$

y-int = $f(0)$

x-int : $y = f(x) = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$
- → factoring (التحليل إلى العوامل)
- → Quadratic formula } القانون العام

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

المميز

(+) المميز: ↓ حلين

صفر ↓ حل واحد

(−) ↓ $\phi$

$a > 0$ : up → (ال Parabola)

$a < 0$ : down

$\boxed{*\ \text{Ex } 1/147}$ $\boxed{C = 3600 + 100x + 2x^2}$

what is the fixed cost?

$\hookrightarrow c(0) = 3600$

$\boxed{D: p = 500 - 2x}$

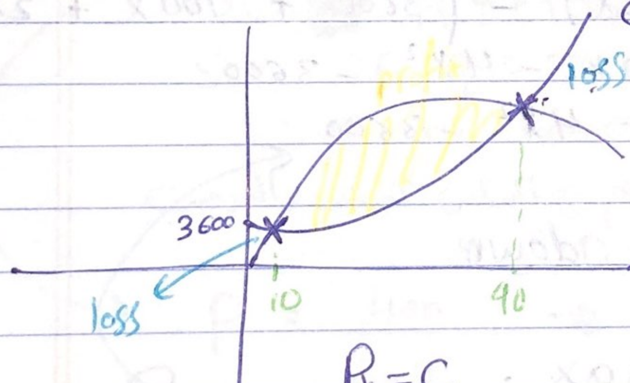
find break even point(s).

A: $B.E \xrightarrow{\text{نحصل عليها}} \underset{\text{موجود}}{C} = \underset{\text{مش موجود}}{R}$ $(P = 0)$.

$\Rightarrow R = px$

$= (500 - 2x)\,x = 500x - 2x^2$

منحنى ال Revenue بالشكل ده .




2 B.E points

$R = C$ (To find B.E.P(s)).

or: $P = 0$.

$500x - 2x^2 = 3600 + 2x^2$

$3600 - 400x + 4x^2 = 0 \rightarrow$ divid 4

$x^2 - 100x + 900 = 0$

$(x - 90)(x - 10) = 0$

$x = 10,\ 90$

$P(x) \geq 0$

$10 < x < 90 \Leftarrow$ ربح بس مش B.E | profit $\Leftarrow 10 \leq x \leq 90$ no loss