$c(10)$

$\Rightarrow$ B.E.$P_{(s)}$: $(10, R(10))$
$(90, R(90))$

$10 \le x \le 90$ توضيح :

$\rightarrow$ no loss

$\Rightarrow$ Profit $\leftarrow$ B.E $\leftarrow$

$10 < x < 90$

Profit

find the maximum profit : (لقدام : منقدر نوجدها من خلال المشتقة)

$$P = R - C$$
$$= (500x) - (2x^2) - (3600 + 100x + 2x^2)$$
$$= 500x - 100x - 4x^2 - 3600$$
$$P = 400x - 4x^2 - 3600$$

$\therefore$ $\rightarrow$ Parabola opens down

$\therefore$ Vertex is Max.

Vertex : $\left(\frac{-b}{2a}, P\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$

$$: \left(\frac{-400}{2 \times -4}, P(50)\right)$$

$P(50) = 6400$

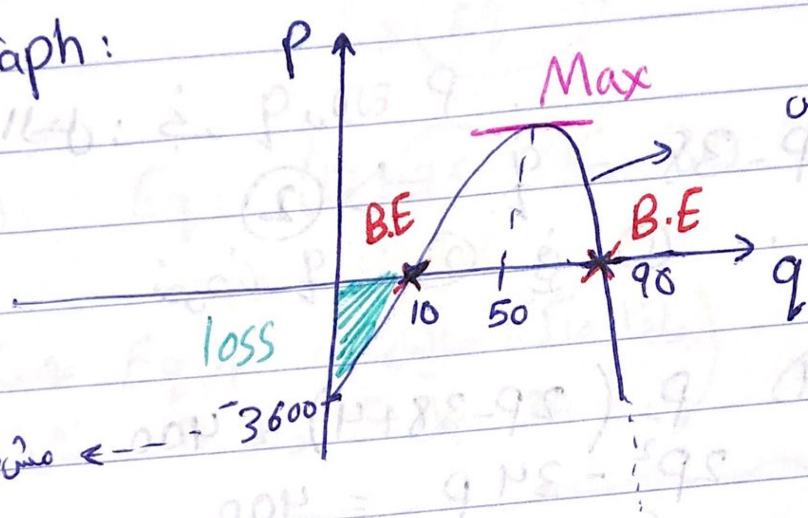
$$= (50, 6400)$$

$\Rightarrow$ The max profit is \$ P(50) when 50 units are produced and sold

Thursday

تكملة المثال السابق :

Graph:



مش بالضرورة تكون ال fixed cost هي اقل خسارة ، المنحنى بنزل .

Ex 3 / 149 :

D: $P(q+4) = 400$

S: $2P - q - 38 = 0$

$\Rightarrow$ not linear

ما منحكم ع أساس السالب والموجب :

$\Leftarrow$ عشان نعرف إذا D أو S .

العلاقة بين q و P عكسية $\Leftarrow$ إذن اقتران D

$$P = \frac{400}{q+4}$$

$2P - q - 38 = 0 \Rightarrow 2P = q + 38$

P و q ، علاقة طردية $\Leftarrow$ إذا اقتران S .

V. imp

$D: \quad p(q+4) = 400 \quad$ — ①

$S: \quad 2p - q - 38 = 0 \quad$ — ②

الحل : نجد q بدلالة P .

$2p - 38 = q \Rightarrow$ ②

نعوض q من ② في ① .

$\Rightarrow p(2p - 38 + 4) = 400$

$2p^2 - 34p = 400$

(divid 2)

$p^2 - 17p - 200 = 0$

(معادلة تربيعية بمجهول واحد) .

$(p+8)(p-25) = 0$

$\boxed{p = \cancel{-8}, \; 25}$

(أو ع المميز) .

ترفض (فش سعر سالب) .

القانون العام ✓

$p = 25$

نعوضها في ② .

$50 - q - 38 = 0$

$\boxed{q = 12}$

$\Rightarrow$ Eq. Point $(12, 25)$

(تكملة) at $P = \$30$ → Shortage ?
→ Surplus ? ✓
→ Eq ?

A: Eq: $(12, 25) < 30$

⇒ ∴ Surplus

(وإذا ماكُنّا حاطّين ال Eq.p معوض ال 30 بال S وال D ومشوف مين أعلى..) .

Ex: 17 / 152 :

fixed costs : $28000

v. cost per unit : $\frac{2}{5}x + 222$

selling price : $1250 - \frac{3}{5}x$

⇒ Find B.E point (من المعطيات مبين)

1) write $c(x)$, $R(x)$, $P(x)$ → نمط الامتحان

* $T.C = V.C + F.C$

$= (\text{cost per unit})\boxed{(\#\text{ of units})} + F.C$

$= \boxed{X}\left(\frac{2}{5}x + 222\right) + (28000)$

v. imp

(not constant) متغير مش ثابت

$T.C = \frac{2}{5}x^2 + 222x + 28000$

$(c(x))$

⟶

* $R(x) = pX = \left(1250 - \frac{3}{5}x\right)x$

$= 1250x - \frac{3}{5}x^2$

$\Rightarrow P(x) = R(x) - C(x)$

$= \left(1250x - \frac{3}{5}x^2\right) - \left(\frac{2}{5}x^2 + 222x + 28000\right)$

$P(x) = -x^2 + 1028x - 28000$

2) find Break Even point(s).

A: $P(x) = 0 \Rightarrow$ to find B.E

$-x^2 + 1028x - 28000 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 1028x + 28000 = 0$

$(x - 1000)(x - 28) = 0$

$x = 1000, 28$

No loss : $28 \leq x \leq 1000$

B.E points : $(28, R(28))$ or $C(28)$, $(1000, R(1000))$ (منوجبلهم)

3) Find maximum revenue $\longrightarrow$

$R(x) = 1250x - \frac{3}{5}x^2$ (parabola: down)

$Max \equiv Vertex = \left(\frac{-b}{2a}, R\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$

$= \left(\frac{-1250}{-1.2}, R\left(\frac{-1250}{-1.2}\right)\right)$

$= (1041, R(1041))$

1041 : # of units to give maximum Revenue (level of production to maximize revenue).

R(1041) : Maximum revenue.

4). Max. profit :

$P(x) = -x^2 + 1028 - 28000$

$\Rightarrow$ parabola opens down.

Vertex : Max

$= \left(\frac{-1028}{-2}, P(--)\right) = (514, P(514))$

level of production to maximize profit

$x = 1041 \Rightarrow$ Max. revenue

$x = 514 \Rightarrow$ Max. profit

دايماً عدد ال units اللي بتعطي Max. R أكبر من اللي بتعطي Max. P

لأن ال Profit فيه cost (باختصار).

Ex : 27 / 153

$p^2 + 4q = 1600$ —— ① D

$300 - p^2 + 2q = 0$ —— ② S

which is the D and which is S ?

A: من : ① طردي وعكسي (تعويض أرقام أو نقل حدود) .

② الرسم

$q = \frac{1600 - p^2}{4}$ → إشارة p^2 ⊖

الرسمة : Down . ⇐ D

و ② : S .

$p^2 = 1600 - 4q$ —— ①

$p^2 = 300 + 2q$ —— ②

But ① = ②

$1600 - 4q = 300 + 2q$

$6q = 1300 \Rightarrow \boxed{q = 216.7}$

بتعويضها في ② أو ① : ينتج أنّ

$p^2 = (300) + 2\left(\frac{1300}{6}\right)$

$\boxed{p = 27}$ → لأنه بطلع سالب (يُرفض)

$\Rightarrow$ Eq. Point $(216.7 , 27)$

September 24th. 2019
Tuesday.

* Linear Models. ✓
* Quadratic Models. ✓
* Exponential and Logarithmic Models (5.1 & 5.2)

رح نرجعلهم كمان مرة
ب chapter 11

Exponential and Logarithmic Models

a^m → Defenetion: $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$

الاقترانات الأسية ⇐

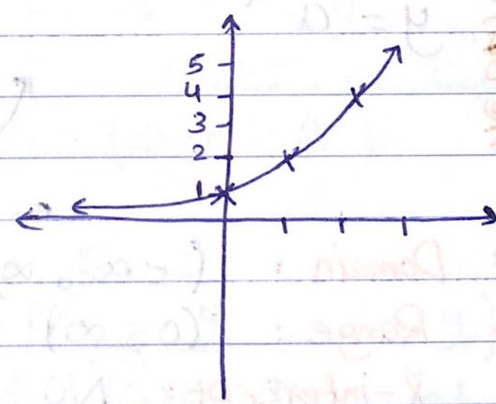
(is called the exponential function with base a).

Ex: $f(x) = 2^x$

Graph:

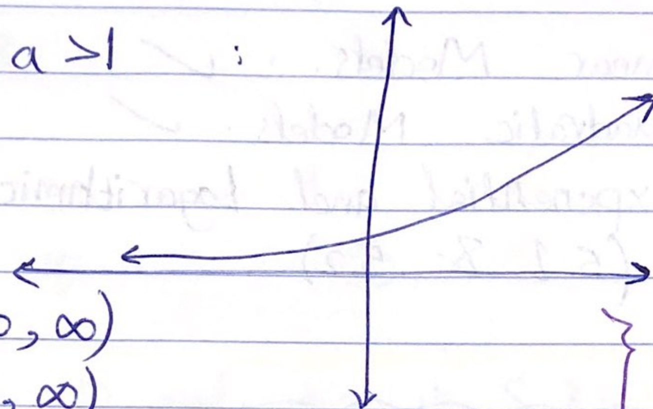
x	$y = 2^x$
0	1
1	2
2	4
-1	$\frac{1}{2}$
-2	$\frac{1}{4}$
⋮	

⇒



تعميم ⇒

$y = a^x \quad , \quad a > 1 \quad :$



* Domain: $(-\infty, \infty)$
* Range: $(0, \infty)$
* x-intercept: NO
* y-intercept: $(0, 1) = f(0)$
* $\boxed{\text{Increasing}}$ or decreasing function?

اقتران متزايد ⟵ : ممكن يكون مثال

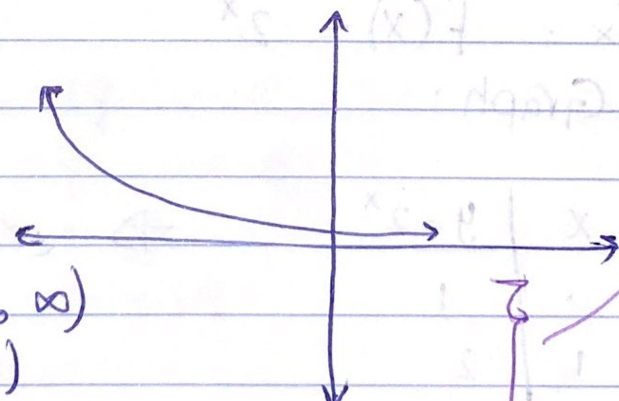
على ال S (supply) بس بدون السالب .

The same

The similar

y

$y = a^{-x}$



Domain: $(-\infty, \infty)$

Range: $(0, \infty)$

x-intercept: NO

y-intercept: $= f(0) = (0, 1)$

Increasing or $\boxed{\text{decreasing}}$ function?

اقتران متناقص ⟵ : ممكن يكون مثال على

ال D (Demand) .

Ex: $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x \Rightarrow$ Inc or Dec ?

A: $\left(\frac{1}{10}\right)^x = (10^{-1})^x = 10^{-x}$

$\Rightarrow$ Decreasing .

v. imp

تعميم $\Longrightarrow$ $0 < a < 1$ $\Rightarrow$ Decreasing function

(الأساس)

Ex Base $\equiv e$ (العدد النيبيري: e)

$y = e^x$

$y = e^{-x}$

$y = y_0 \, e^{kx}$

constant / عدد

(constant)

$y(0) = y_0 \, e^0$

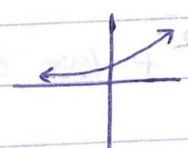
$= y_0 \times 1$

$= y_0$

عشان هيك سميناه y_0

($\Rightarrow$ or : A)

① $k > 0$:



Domain , Range , x-int $\Rightarrow$ نفس الحكي

But y-int $= y(0) = f(0) = y_0 \Rightarrow (0, y_0)$

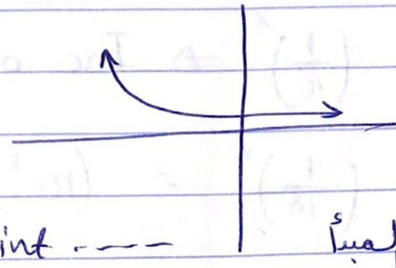
Increasing $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Growth}}$ نمو

مثل : عدد السكان في عدة دول (متزايد)

وال Supply (طردي) .

② $\longrightarrow$

② $K < 0$:



Domain , Range , X وy -int ---- نفس المبدأ

Decreasing $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Decay}}$ (ديكاي)

مثل : عدد السكان في الدول الإسكندنافية (نقل")

والـ Demand (D) .

Ex: 1) $f(x) = 10\, e^{2x+1}$

$\Rightarrow$ y-int $= f(0) = 10e^1$

$= \boxed{10e}$.

$\boxed{e : \text{exponential}}$

تنكس

2) $C(x) = x^2 + 10x + \underbrace{e^x + 100}_{\text{الحد الثابت}}$

(cost fun)

$\Rightarrow$ what is the fixed cost ?

A, fixed cost $= c(0) = 0 + 0 + e^0 + 100$

$= 1 + 100 = \boxed{101}$.

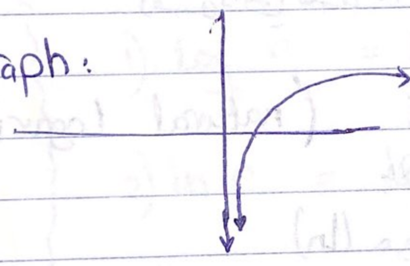
$2^{\boxed{??}} = 256 \Rightarrow$ Logarithmic function.

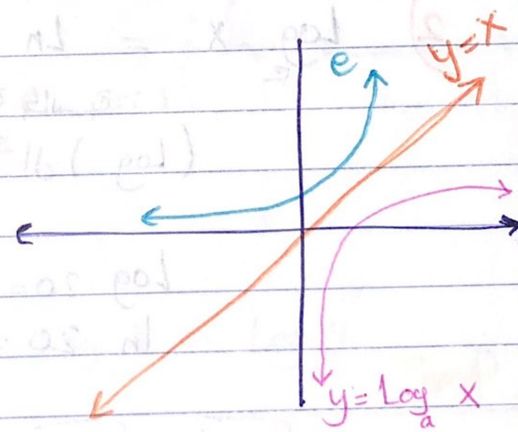
$\Rightarrow \log_2 256 = 8$

$\boxed{\text{Log form}}$: $y = \log_a x$ $\Rightarrow a^y = x$ $\Bigg\}$ $a > 0$, $a \neq 1$

Ex: $\log_2 x = y$ $\quad (2^y = x)$

Graph:





⇐ كأنّه : e انعكاس لل Log

Inverse

المعطيات من الرسمة (Log فقط)

- Domain : $(0, \infty)$
- Range : $(-\infty, \infty)$
- y-int ? NO
- x-int : $(1, 0)$
- Increasing function

$x = 0$

$\Rightarrow \log_2 0 = \uparrow$

للتذكير

Ex: $y = \log_2 (2x + 3)$

إلي قدام اللوغاريتم
(جوا اللوغاريتم)
لازم يكون موجب
طبعاً

A: $2x + 3 > 0$

$2x > -3$

$x > \frac{-3}{2} \Rightarrow$ Domain.

---

* Special Logarithims :

1) $\log_{10} x = \log x \equiv$ Common Logarithim

(فش داعي نحط ١٠) .

2) $\log_e x = \ln x$ (natural Logarithim)

بالآلة الحاسبة :

($\log$) مش ال ($\ln$)

مثال للتجربة : $\log 20 = 1.3$

$\ln 20 = 3$

عشان بس يطلع العكس

$\boxed{\log}$ $\boxed{\ln x}$

or: 10^x e^x ⇝ Shift , ln , 5 , =

بالآلة الحاسبة .

$\boxed{148.4}$

Ex.: $\log_8 5 \Rightarrow$ باستخدام الآلة الحاسبة

أو :

Change of bases ; $\log_b a = \frac{\ln a}{\ln b} = \boxed{\frac{\log_m a}{\log_m b}}$

بتلزمه (log أو ln)

A: $\log_8 5 = \frac{\log 5}{\log 8}$ = [redacted]

مستخدم $\frac{\ln 5}{\ln 8}$?

مهو سكالنا أو

$\log_e x = \ln x$

لازم يكون الأساس e

خصائص :

1) $\log_a a = 1$

2) $\ln e = \log_e e = 1$

3) $\log_a 1 = 0$

4) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ imp

5) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

$e^{2\ln x} = e^{2\log_e x} = e^{\log_e x^2} = x^2$

6) $\log_a x^n = n \log_a x$

7) $\log \frac{1}{x} = -\log_a x \Rightarrow \log_a x^{-1}$ / $\log_a 1 - \log_a x$

8) $\log_a a^x = x$

imp 9) $a^{\log_a x} = x$

Sep 26, 19
Thursday

$\log_a a^x = x$ for any x

$a^{\log_a x} = x$ for $x > 0$

<u>Ex</u> : solve for x

1) $3^{x+1} = 7$ exponential equation

أخذ لو الطرفين أو ln

$\Rightarrow \ln 3^{x+1} = \ln 7$

$(x+1) \ln 3 = \ln 7$

$x+1 = \frac{\ln 7}{\ln 3}$

$x = \frac{\ln 7}{\ln 3} - 1 = {}^{-}0.15$

$\log_3 7 - 1$

2) $\log x + \log(x-3) = 1$ $\Rightarrow$ Logarithmic equation

$\Rightarrow \log x(x-3) = 1$

$\log_{10}(x^2 - 3x) = 1$

$10^1 = x^2 - 3x \rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$

$(x-5)(x+2) = 0$

$x = 5$ $\quad$ $x = -2$

مرفوض

Chapter 6

6.1
6.2

* Simple and compound Interest.

Let
P = present value
S = future value (Amount)
or, A
t ≡ time (in years)
r ≡ annual interest rate (الفائدة السنوية)
I = Interest (ربح)

Simple Interest

$\boxed{I = prt}$

$S = p + I$

$= p + prt$

$\Rightarrow \boxed{S = p(1 + rt)}$

Ex 2/ 372

(p=) $2000 , (t=) $\frac{1}{2}$ year , (r=) 12%.

find S

$I = prt = 2000 \times \frac{1}{2} \times 0.12$

$= 120$

$S = p + I = 2000 + 120 = \$2120$

or, $S = p(1 + rt)$

$= 2000 \left(1 + \left(\frac{1}{2} \times 0.12\right)\right) = \$2120$

b) Investor want to have 6.5% in 9 month

في اشي غلط
لا سؤال
(تطبيق).

$\Rightarrow S = p(1 + rt)$

$p = \frac{S}{(1+rt)} = \frac{20000}{1 + \left(0.0605 \times \frac{9}{12}\right)}$

time must be in year

$P = \frac{20000}{1.045}$

$= \$19131.89$

Ex $\boxed{4}$ If \$ 1000 is invested ($\Rightarrow$ ∴ $P = 1000$)

$r = 5.8\%$, $t = ??$

to grow to \$ 1100

(future) ↳ (S)

A: $S = p(1+rt)$

$1100 = 1000\,(1 + 0.058\,t)$

$1.1 = 1 + 0.058\,t$

$0.1 = 0.058\,t$

$t = 1.7$ years.

Ex: How long will it take an investment to be doubled at an annual interest rate of 10%?

$\left(\$P \overset{\text{بعد فترة}}{\Rightarrow} S = 2P\right)$

A: $S = p\,(1+rt)$

$2\cancel{P} = \cancel{P}\,(1 + 0.1\,t)$

$2 = 1 + 0.1\,t$

$1 = 0.1\,t$

$t = 10$ years.

* Compound Interest

(اليوم) $P \xrightarrow{\text{future}} P + I \longrightarrow$ New بنهاية السنة الحالية

$\boxed{\text{سلسلة هندسية}}$

سلسلة حسابية ؛ S بال

1) $$\boxed{S = P(1+r)^t}$$ compounded annually

let $m \equiv$ number of compounded periods per year

2) $$\Rightarrow \boxed{S = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}}$$ m : should be given.

* Continuously : استمرارية → الأسئلة بيعطونا تابعها ← نستخدم هاد القانون

3) $$\boxed{S = Pe^{rt}}$$ (growth)

4) $$\boxed{S = P(1+rt)}$$ Done

Simple Interest.

Ex: If \$1000 is invested at annual rate of interest 8% for 10 years.

P, r, t

Find S.

. S لو حطلب : أوجد ال compounded

1) Simple interest:

$S = P(1+rt) = 1000(1 + 0.8(10))$

$= 1800$

2) Compounded annually: $m=1$ → yearly

$S = P(1+r)^t$ or $S = P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}$

$S = 1000(1+0.08)^{10} = \$2158.52$

$I = S - P$

3) Compounded semiannually $m=2$

$(m=2)$

$S = 1000\left(1 + \frac{0.08}{2}\right)^{10.2}$

$= \$2191.12$

4) quarterly $(m=4)$

$S = 1000(1.02)^{40} =$

الأكثر فائدة

5) Continuously:

$S = Pe^{rt} = 1000\, e^{(0.08)(10)}$

$= 1000\, e^{0.8}$

$= 1000\,(\text{shift } \ln 0.8) = \$2225.54$

how long

Ex 9 / 385 : $P = \$10000$ to double ($\$20000$)

if :

a) 8% annually.

b) 8% continuously. ⟹ أسرع

A : a) $S = p(1+r)^t$

$20000 = 10000\,(1+0.08)^t$

$2 = (1.08)^t$ ⟹ exponential equation

$\ln 2 = \ln (1.08)^t$

$\ln 2 = t \ln 1.08$

$t = \dfrac{\ln 2}{\ln 1.08} = \boxed{9 \text{ years}}$

أسرع

b) $S = Pe^{rt}$

$20000 = 10000\, e^{0.08t}$

$2 = e^{0.08t}$

$\ln 2 = \ln e^{0.08t}$

$\ln 2 = 0.08t \underbrace{\ln e}_{1}$

$0.08t = \ln 2$

$t = \dfrac{\ln 2}{0.08} = \boxed{8.7 \text{ years}}$

Oct 1^{st}, 19

* Simple : $S = p(1+rt)$

$$S = p\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}$$

$$S = pe^{rt}$$

Ex: $\boxed{38}$: rate = ??

$p = \$10,000$ to $S = \$14071$

in 7 years.

Compounded annualy $(m=1)$

A: $14071 = 10,000(1+r)^7$

$$\frac{14071}{10,000} = (1+r)^7$$

$$1.4071 = (1+r)^7$$

$$\ln 1.4071 = 7\ln(1+r)$$

$$\frac{0.34}{7} = \ln(1+r)$$

$$\ln(1+r) = 0.048$$

$$e^{\ln(1+r)} = e^{0.048}$$

$1+r =$

or

أسهل

$$\left((1+r)^7\right)^{1/7} = (1.4071)^{1/7} \Rightarrow \text{calculator}$$

$1+r = 1.05$

$$\boxed{r = 0.05}$$

b) Compounded continuously :

$S = p e^{rt}$

$~~1400~~$

$14071 = 10000 e^{7r}$

$1.4071 = e^{7r}$

$\ln 1.4071 = 7r \cancel{\ln e}^{1}$

$0.34 = 7r$

$\boxed{r = 0.049}$ #

---

44 $t = ??$ $P = \$8000$

$S = \$15000$

r 9%, monthly $(m=12)$

A: $S = p\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}$

$15{,}000 = 8{,}000\left(1 + \frac{0.09}{12}\right)^{12t}$

$1.875 = (1 + 0.0075)^{12t}$

$\ln 1.875 = 12t \ln 1.0075$

$12t = 84.13$

$\boxed{t = 7 \text{ years}}$ #

Derivatives — المشتقات — chapters: 9, 10, 11 (معتمدات على بعض)

Integrals — التكامل — chapters: 12, 13 (برضو معتمدات على بعض)

$\boxed{9.1}$ Limits — النهايات

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x-2} \quad (x \neq 2)$$

$$f(x) = \frac{(x+3)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = x+3 \quad (x \neq 2)$$

$\Rightarrow g(x) = x+3$

$\Rightarrow f(x) \neq g(x)$

Because: domain $g(x) = R$

domain $f(x) = R - \{2\}$

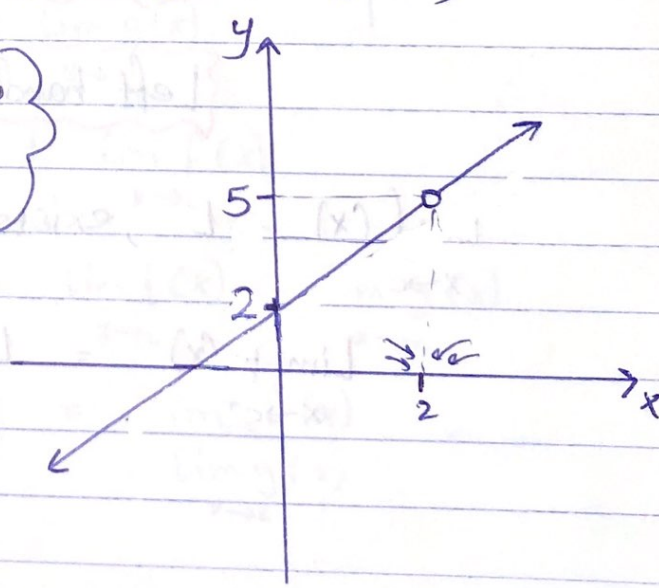
(المجالين مش متساويين إذن الإقترانين مش متساويين).

x	f(x)
2.1	5.1
2.05	5.01
2.01	5.05
1.99	4.99
1.95	4.95
1.9	4.9

بقرب ع 2 — بقرب ع 5

بقرب ع 2 — بقرب ع 5

بس منعوض بـ g(x) أسهل



التفسير →