Derivatives — المشتقات

chapters: 9, 10, 11

(معتمدات على بعض)

Integrals — التكامل

chapters: 12, 13

(بوخدو معتمدات على بعض)

$\boxed{9.1}$ Limits — النهايات

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} \qquad (x \neq 2)$$

$$f(x) = \frac{(x+3)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = x + 3 \qquad (x \neq 2)$$

$\Rightarrow g(x) = x + 3$

$\Rightarrow f(x) \neq g(x)$

Because: domain $g(x) = \mathbb{R}$

domain $f(x) = \mathbb{R} - \{2\}$

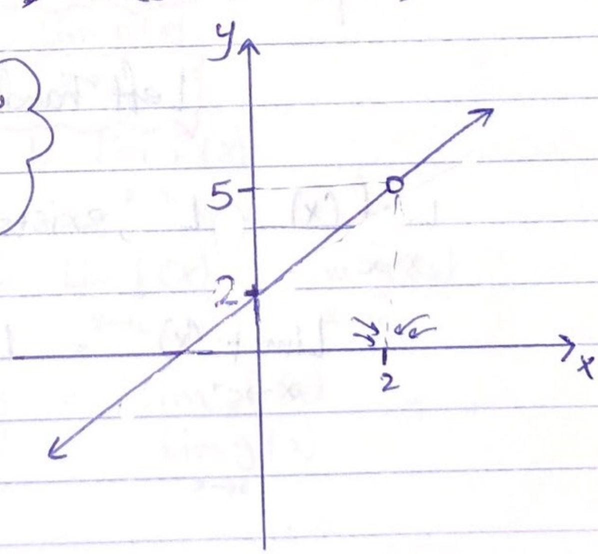
(المجالين مش متساويين إذن الإقترانين مش متساويين)

x	f(x)
2.1	5.1
2.05	5.01
2.01	5.05
1.99	4.99
1.95	4.95
1.9	4.9

بقرب ع 2 — بقرب ع 5

بقرب ع 2 — بقرب ع 5

بس منعوض ب g(x) أسهل



التفسير

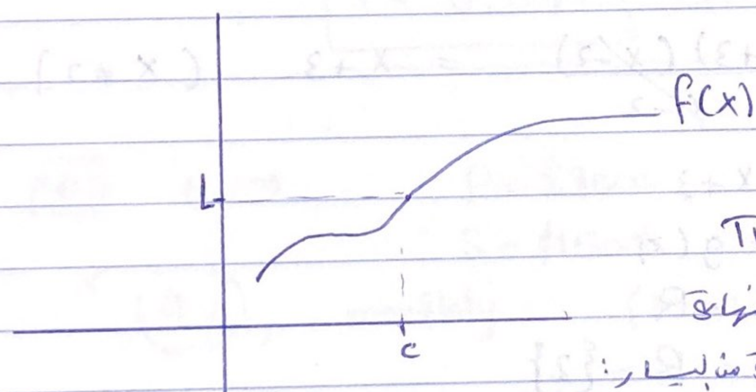
(تقترب)

As x approaches 2 , f(x) approaches 5

$\Rightarrow$ The limit of f(x) as x approaches 2 is 5

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 5$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = 5 \qquad (x \neq 2)$$



$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

The limit exists.

النهاية موجودة إذن النهاية

من اليمين = النهاية من اليسار :

Right hand limit : $\lim_{x \to c^+} f(x)$

Left hand limit : $\lim_{x \to c^-} f(x)$

$\lim_{x \to c} f(x) = L$, exists if and only if (إذا وفقط إذا)

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x) = L .$$

(كثير حدود)

* Note 1: if $p(x)$ is a polynomial, then

$$\lim_{x \to c} p(x) = p(c)$$

كثير حدود ← النهاية = الصورة.

Ex: $\lim_{x \to -1} x^3 + 4x^2 + 10$

مش $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ← معوضة

$= -1 + 4 + 10 = 13$.

* Note 2: If $R(x)$ is a rational function (نسبي):

$R(x) = \frac{L(x)}{g(x)}$, then $\lim_{x \to c} R(x) = \frac{L(c)}{g(c)}$

لكن $(g(c) \neq 0)$ لازم

* Note 3: a) $\lim_{x \to c} [f(x) \pm g(x)]$ توزيع النهاية على $\pm$

$= \lim_{x \to c} f(x) \pm \lim_{x \to c} g(x)$

b) $\lim_{x \to c} \overset{\text{ثابت}}{k} f(x) = k \lim_{x \to c} f(x)$

c) $\lim_{x \to c} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x)$

* Note 4: $\lim_{x \to c} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}$.

Ex: $\longrightarrow$

Oct 3, 19
Thursday

Sec 9.1 Limits:

Ex 32/554: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-4}{x-3}, & x \leq 2 \\ \dfrac{3-x^2}{x} & x > 2 \end{cases}$

اقتران متعدد القاعدة ⇐
(peicewix defined function)

find the limits (if they exist).   المطلوب:

* $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{x^3-4}{x-3} = \dfrac{-4}{-3} = \dfrac{4}{3}$

* $\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \dfrac{3-x^2}{x} = \dfrac{-6}{3} = -2$

* $\lim_{x\to 2} f(x)$: $\Rightarrow \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \dfrac{3-x^2}{x} = -\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \dfrac{x^3-4}{x-3} = -4$

$\Rightarrow \lim_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim_{x\to 2^-} f(x)$

$\therefore \lim_{x\to 2} f(x)$ Does Not Exist.
(DNE).

(52) $\lim_{x\to5}\left[f(x)-g(x)\right]=8$, $\lim_{x\to5} g(x)=2$. $\boxed{\text{Find}}$:

a- $\lim_{x\to5} f(x)$??

$\Rightarrow \lim_{x\to5} f(x) - \lim_{x\to5} g(x) = 8$

$\Rightarrow$ So: $\lim_{x\to5} f(x) = 8+2 = \boxed{10}$ #

b- $\lim_{x\to5}\left[(g(x))^2 - f(x)\right]$

$= \lim_{x\to5}(g(x))^2 - \lim_{x\to5} f(x)$

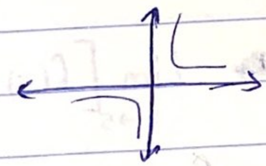
$= 2^2 - 10 = 4-10 = \boxed{-6}$ #

c- $\lim_{x\to5} \dfrac{2x\, g(x)}{4-f(x)} = \dfrac{\lim_{x\to5} 2x\, g(x)}{\lim_{x\to5} 4 - \lim_{x\to5} f(x)}$

$= \dfrac{2\lim_{x\to5} x \cdot \lim_{x\to5} g(x)}{4-10}$

$= \dfrac{10 \cdot 2}{-6} = \dfrac{20}{-6} = \boxed{\dfrac{-10}{3}}$ #

Ex: $f(x) = \frac{1}{x}$



$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x)}$,

Domain $\neq 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)$ D.N.E

Ex: $f(x) = \frac{x}{x-2}$, $x \neq 2$

1) $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{1-2} = -1$

2) $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{0}{0-2} = 0$

3) $\lim_{x\to 2} f(x)$: $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x-2} = \frac{2}{0^+}$

$= +\infty$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$

1.9 ← عدد أقل من 2

لشوي (طرح) ناقص 2 ← سالب

$\Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)$ D.N.E

(هاد توضيح) من الأول مبين انها مش موجودة

! بصفر مقام

Ex : $\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2+3x-10} = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{x-2}}{(\cancel{x-2})(x+5)}$

$= \lim_{x \to 2} \frac{1}{x+5}$

$= \boxed{\frac{1}{7}}$ #

(المقام ≠ صفر)

Domain :
$x \neq 2$
$x \neq -5$

* الاقتران مش مُعرّف عند 2 بس الصورة موجودة .

9.2 Continuous functions and limit at infinity . (الاقترانات المتصلة)

* Definition : The function $f(x)$ is continuous at $x = C$ if :
  1. $f(c)$ exists (الاقتران مُعرّف عند c)
  2. $\lim_{x \to c} f(x)$ exists $\Rightarrow$ نها (يمين) = نها (يسار)
  3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ (النها = الصورة)

Notes : 1) If $p(x)$ is polynomial (كثير حدود) , then $p(x)$ is continuous :

$\Rightarrow \lim_{x \to c} p(x) = p(c)$

كثير حدود ومتصل ⇐ النهاية = الصورة .

2) $R(x) = \frac{P(x)}{q(x)}$ (Rational function) اقتران نسبي

is continuous for all $q(x) \neq 0$

Ex ⟶

ex $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+3x-10}$ $\quad x \neq 2, -5$

$\Rightarrow f(x)$ is continuous for all $x \neq +2, -5$

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \leq 1 \\ 2x^2-1, & x > 1 \end{cases}$$

(at $x = 1 \rightarrow$ الاقتران بتغير قاعدته
$\Leftarrow$ لازم نبحث في الاتصال عن طريق)

* $f(1) = 1^2 + 1 = 2$
* $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} 2x^2-1 = 2-1 = 1$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2+1 = 1+1 = 2$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

* $\Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} f(x)$ D.N.E

$\Rightarrow f(x)$ is not continuous at $x = 1$

or: $f(x)$ is discontinuous at $x = 1$.

أكبر أو أصغر من 4

Ex: $f(x) = \begin{cases} x^2-4 & , \; x \neq 4 \\ a & , \; x = 4 \end{cases}$

Find "a" such that $f(x)$ is continuous for all x.

A: $f(x)$ is cont. $\Rightarrow$ So: $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = f(4)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 4} x^2-4 = a$ حتى يكون الاقتران متصلاً : النهاية = الصورة (a)

$a = 16-4 = \boxed{12}$ #

---

* Limit at infinity:

$R(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow$ Find $\lim\limits_{x\to\infty} R(x)$.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} R(x) = \begin{cases} \text{1) degree } f(x) < g(x) , & \lim = 0 \\ \text{2) degree } f(x) = g(x) , & \lim = \text{Constant} \\ \text{3) degree } f(x) > g(x) , & \lim = \pm\infty \end{cases}$

1) درجة البسط أقل من درجة المقام ⇐ النهاية = صفر

2) درجة البسط = درجة المقام ⇐ النهاية = $\dfrac{\text{معامل أكبر قوة في البسط}}{\text{معامل أكبر قوة في المقام}}$ = ثابت

Examples:

1- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = 0$ —— 1

$\longrightarrow$

2- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2-3x^2}{2x^2+10} = \dfrac{-3}{2}$ —— ②

3- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+4}{x+1} = \infty$ —— ③

4- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3+4}{x+1} = +\infty$ —— ③

5- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^5+4}{x^2+10} = -\infty$

Oct 8.19
Tuesday

Examples :

1- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+10x}{x^3-5} = 0$

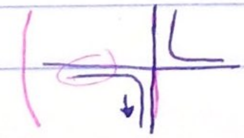
2- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-x^2+10x}{10-3x^3} = -\dfrac{1}{3}$ ⇐ $\dfrac{\text{معامل أكبر قوة في البسط}}{\text{,, ,, ,, المقام}}$ لأن درجة البسط = درجة المقام

3- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+x^2}{x+1} = \infty$

4- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3+x^2}{x^2+1} = -\infty$

Def: The line $y=b$ is $\overbrace{\text{horizantal asymptote}}^{\text{خط تقارب أفقي}}$ for the graph of $y=f(x)$ if either:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ or $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$



تذكير (الخط التقارب الأفقي في رسمة $\frac{1}{x}$)

Ex ⟶

الفكرة : السؤال بعطيني اقتران ← بجد النهاية $\boxed{x \to \infty}$ ← إذا الجواب طلع رقم أو صفر ← إذن في Horizantal asymptote

إذا الجواب ما طلع رقم (طلع: $\pm\infty$) ← إذن ما في Horizantal asymptote.

Examples: 1- $f(x) = \frac{1}{x}$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

$\Rightarrow y = 0$ (x-axis) محور السينات

is a horizantal asymptote.

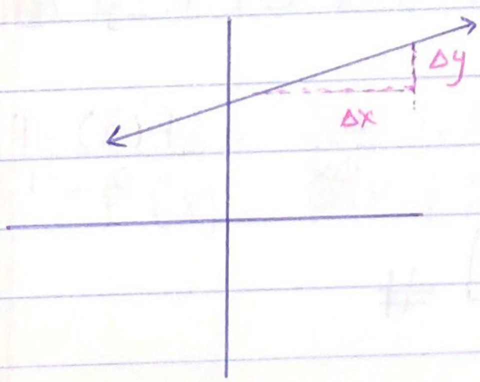
2- $f(x) = \frac{2x+1}{x+1} \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{2x+1}{x+1} = 2$

$\Rightarrow y = 2$ is a horizantal asymptote.

3- $f(x) = \frac{x^2}{x+1} \Rightarrow \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$\Rightarrow$ No horizantal asymptote.

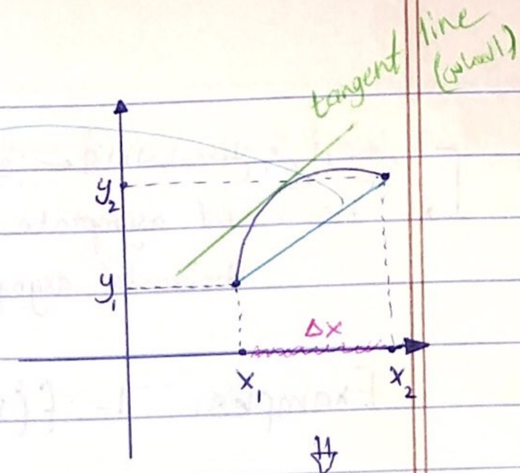
9.3 Derivatives المشتقات



Slop $= \frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\Delta x \neq 0$

Marginal

يُسمّى : Secant (القاطع)



Slope of Secant $= \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

ملاحظة : لمّا نصغّر Δx ⇐ القاطع بيصغر ⇐ يقترب من المماس

But : $\Delta x = x_2 - x_1$

$x_2 = \Delta x + x_1$

$\Rightarrow$ slope $= \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x + x_1 - x_1} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x}$

let $\Delta x = h$ (ه)

$\Rightarrow$ slope $= \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{h}$

If $y = f(x)$, then $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ = Average rate of change of $f(x)$ over the internal ($[x_1, x_2]$)

الفترة المغلقة

⇐ الميل = معدل التغير على الفترة [س١، س٢] ل ق(س) .

<u>Example</u> : $f(x) = x^2 - 10$, $x \in [-1, 2]$

$\Rightarrow$ Average rate of change $= \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(2) - f(-1)}{2 - -1}$

$= \dfrac{-6 - -9}{3} = \dfrac{3}{3} = \boxed{1}$ #

* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ If limit exists,

(متوسط التغير)

then it is called the (instantanous) rate of change (Rate of change) or it called the first derivative if f(x) with respect to x.

(المشتقة الأولى).

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ = معدل التغير ، متوسط التغير = ميل = $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$\Rightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Rate of change (متوسط التغير)

1st derivative

$\boxed{f'(x) = f'(x) \Big|_{x=a}}$

- Slope of the tangent line
- Velocity (السرعة)
- Rate of change
- Marginal

$f'(x) = \frac{dx}{dy}$ $\frac{\text{دلتا } x}{\text{دلتا } y}$

بس d تغير صغير مش زي Δ : كبير

* If $C(x) = \text{cost} \Rightarrow C'(x) = \frac{dc}{dx} = \overline{MC}$ (Marginal cost)

$R'(x) = \overline{MR}$ (Marginal Revenue).

$P'(x) = \overline{MP}$ (Marginal Profit).

* قواعد الاشتقاق

Rule 1: $y = f(x) = x^n$

$$y' = f'(x) = n\,x^{n-1}$$

دص / دس

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(x^n\right) = n\,x^{n-1}$$

Rule 2: $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

* المشتقة توزع على الجمع والطرح ولا توزع على الضرب والقسمة.

Rule 3: $(kf)' = k f'$ $\quad (k = \text{constant})$

Rule 4: $y = k \longrightarrow y' = 0$

* مشتقة الثابت = صفر

Examples:

1- $\dfrac{d}{dx}\left(x^{100}\right) = 100\,x^{99}$

2- $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x^{10}}\right) = \dfrac{d}{dx}\,x^{-10} = -10\,x^{-11} = \dfrac{-10}{x^{11}}$

3- $\dfrac{d}{dx}\sqrt[3]{x} = \dfrac{d}{dx}\,x^{1/3} = \dfrac{1}{3}\,x^{-2/3} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

4- $y = f(x) = 3x^3 + \dfrac{4}{x^2} + \sqrt{x} + 10$

$$y' = 9x^2 - \frac{8}{x^3} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \#$$

سالب الثابت × مشتقة المقام
المقام²

Oct 10.19
Thursday

Examples:

① $f(x) = (x^2+1)(x^3+4x+2)$, find $f'(x)$.

$\Rightarrow f(x) = x^5 + 4x^3 + 2x^2 + x^3 + 4x + 2$

$f(x) = x^5 + 5x^3 + 2x^2 + 4x + 2$

$f'(x) = 5x^4 + 15x^2 + 4x + 4$

② $f(x) = \dfrac{x^3+2}{x^4-1}$, find $f'(x)$

$\Rightarrow f'(x)$

$$= \frac{(x^4-1)(3x^2) - (x^3+2)(4x^3)}{(x^4-1)^2}$$

.... etc.

Rule 5 + 6:

5- $(f \cdot g)' = f'g + g'f$

6- $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{gf' - fg'}{g^2}$

Ex: Let $R(x) = 300x - x^2$

$R'(x) \equiv$ Marginal Revenue $= \overline{MR}$

$= 300 - 2x$

* $R(x) \geq 0$ دائماً

$\Rightarrow R'(x)$??

⇓

Find $R'(100)$, $R'(200)$, $R'(150)$.

$\Rightarrow R'(100) = 300 - 200 = \$100$

$R'(200) = 300 - 400 = -\$100$

$R'(150) = 300 - 300 = \$0$

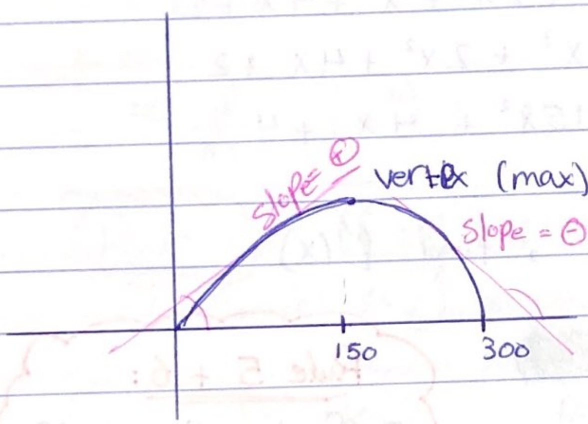
* $\{ \Rightarrow \overline{MR}\ (R') = \ominus$ or $\oplus$ or zero $\}$

$R(x) = 300x - x^2 \rightarrow$ (parapola) رسمة قطع

$= x(300 - x)$

$R(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ or $x = 300$

(* ال vertex بتجي بالنص)



* الميل بزيد لعند (max)
بعدين بصير يقل
($\overline{MR} \Rightarrow \oplus$)

$R(10) = 3000 - 100 = \$2900$

$R(11) = 3300 - 121 = \$3179$

$\Rightarrow R(11) - R(10) = \boxed{\$279}$ = Marginal Revenue

\$ 279 يعني الوحدة رقم 11 ← زادت الريفينيو

تقريباً نفس الاشي

But also : $R'(x) = 300 - 2X$

$R'(10) = 300 - 20 = \boxed{\$280}$

= Marginal Revenue

طبعاً مش صدفة ☺

الخلاصة

$\Rightarrow$ $R(11) - R(10)$ is the exact $\overline{MR}$ أدق ✓ (بالزبط)

$R'(10)$ is the approximate $\overline{MR}$ (تقريباً)

$$P(x) = R(x) - C(x)$$
$$P'(x) = R'(x) - C'(x)$$
$$\Rightarrow \overline{MP} = \overline{MR} - \overline{MC}$$

v.imp

تفسير ليش المارجينال طلع ثابت :

$$C(x) = mx + b$$
$$C'(x) = m$$
$$\Rightarrow C(x+1) - C(x) = m$$

Example: Let $f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 4$

a- write the tangent line to $f(x)$ at $x = 0$

متى أوجد معادلة المماس بدي نقطة وميل

$\Rightarrow$ at $x = 0$ $\Rightarrow f(0) = 0 - 0 - 0 + 4 = 4$

$\rightarrow \boxed{(0, 4)}$

$$\text{slope}\Big|_{x=0} = f'(x) = 3x^2 - 6x - 45$$

$$f'(0) = 0 - 0 - 45 = \boxed{-45}$$

$$\rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 4 = -45(x - 0)$$
$$y - 4 = -45x$$
$$\boxed{y = 4 - 45x}$$ #

b- Find the point(s) where $f(x)$ has a horizantal tangent. $\longrightarrow$

مماس أفقي ⟸ إذن المشتقة = صفر

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 45$

$(0 = 3x^2 - 6x - 45) \,/\, 3$

$x^2 - 2x - 15 = 0$

$(x-5)(x+3) = 0$

$\Rightarrow x = 5$ or $x = -3$

$\Rightarrow$ Points : $(-3, f(-3))$, $(5, f(5))$

$= (-3, \ldots$ etc.

✱ The Equation of the horizantal tangent :

$y = f(x) \Rightarrow y = f(5)$

or $y = f(-3)$

(y = constant ; Horizantal) .

Example : If $q = \frac{100}{\sqrt{p}} + 10$.

Demand ; علاقة عكسية بين q و p

Find the rate of change at q with respect to p at $p = 25$, $p = 100$. Explain your answer.

$\Rightarrow$ The rate of change $= q' \Rightarrow q = 100\,p^{-1/2} + 10$

$q' = -50\,p^{-3/2}$

ملاحظة (مش غريبة طلع سالب ، لأن ال D لازم يكون ميله سالب)

V.imp

$$q'\Big|_{p=25} = \frac{-50}{\sqrt{(25)^3}} = \frac{-50}{125} = -0.4 \quad \boxed{\text{Units Per } \$}$$

⇐ لمّا نشتقّ ال q بالنسبة لل P $\left(\frac{dq}{dp}\right)$: الوحدة بتكون unit per $

أمّا العكس $\left(\frac{dP}{dq}\right)$: الوحدة بتكون $ per unit

⇒ Explanation: An increase of \$1 at $P=25$ will decrease the units demanded by 0.4

Oct 17
Thursday

$\boxed{9.6} + \boxed{9.7} + \boxed{9.8}$

→ The Chain Rule (قاعدة السلسلة)

⊛ $(f\circ g)(x) = f(g(x))$
$(g\circ f)(x) = g(f(x))$
The composit of functions (تركيب الاقترانات)

Ex

$f(x) = x^2+5$

$g(x) = x+3$

- ⇒ $(f\circ g)(1) = f(g(1))$

$= f(4) = 16+5 = 21$

- $(g\circ f)(1) = g(f(1)) = g(6)$

→ $g(6) = 9$

Chain Rule →

Chain Rule:

① If $y = f(u)$ and $u = g(x)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot g'(x)$$

$$= f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

② $y = (f \circ g)(x) \Rightarrow y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

← مشتقة ما بداخل القوس .

③ $y = (g(x))^n \Rightarrow y' = n \cdot (g(x))^{n-1} \cdot g'(x)$

مشتقة القوس x مشتقة ما بداخل القوس .

Examples: ① If $f(x) = (x^2 + x)^{10}$. $f'(x) = ??$

$$\Rightarrow f'(x) = 10(x^2 + x)^9 \cdot (2x + 1)$$

② $g(x) = \dfrac{5}{\sqrt{x^2+1}}$. $g'(x) = ??$

$$g(x) = 5(x^2+1)^{-1/2}$$

$$\Rightarrow g'(x) = -\frac{5}{\cancel{2}}(x^2+1)^{-3/2} \cdot \cancel{2}x$$

$$= \frac{-5x}{(x^2+1)^{3/2}} = \frac{-5x}{\sqrt[2]{(x^2+1)^3}}$$

③ If $y = (f \circ g)(x)$, $f'(1) = 2$, $f(1) = 3$

$g'(1) = 5$, $g(1) = 1$

Find $(f \circ g)'(1)$

$\Rightarrow (f \circ g)'(1) = f'(g(1)) \cdot g'(1)$

$= f'(1) \cdot 5 = 2 \times 5 = \boxed{10}$

26/603: $y = (4x^3 - 5x + 1)^3$ at $(1, 0)$

Find a- The slope of the tangent line

b- The instantaneous rate of change.

→ المشتقة

a: Slope $= y'(1)$

$y' = 3(4x^3 - 5x + 1)^2 \cdot (12x^2 - 5)$

$y'(1) = 3(4 - 5 + 1)^2 \cdot (12 - 5)$

$= (3)(0) \cdot (7) = 0$

نستنتج (الميل = صفر إذن المماس أفقي إذن y=constant)

$\Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$ طريقة طويلة

$y - 0 = 0(x - \phi)$

$\boxed{y = \phi} \rightarrow x\text{-axis}$

+ طريقة ع السريع : بما أن المشتقة = صفر ∴ المماس أفقي (Horizantal)

∴ ص ثابتة = [illegible] 1

(1, 0)

29/603 : $y = \sqrt{3x^2 - 2}$ at $x = 3 \Rightarrow$ find :

The equation of the tangent line .

$\Rightarrow$ We need : slope & point

Point : $(x, f(x)) = (3, y(3))$

$y(3) = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow (3, 5)$

Slope $= y'\Big|_{x=3}$

$$y' = \frac{6x}{2\sqrt{3x^2-2}} = \frac{3x}{\sqrt{3x^2-2}}$$

مشتقة مابداخل الجذر

٢× الجذر

$$\Rightarrow y'\Big|_{x=3} = \text{slope} = \boxed{\frac{9}{5}}$$

$\Rightarrow$ Equation : $y - 5 = \frac{9}{5}(x - 3)$

$$y - 5 = \frac{9}{5}x - \frac{27}{5}$$

$$\boxed{y = \frac{9}{5}x + \frac{2}{5}}$$ #

40/604 : $R = 15(3x+1)^{-1} + 50x - 15$ dollars.
Find the marginal revenue when 40 units are sold. Interpret your result.

* $\overline{MR} = R'$

$\Rightarrow R' = -15(3x+1)^{-2} \cdot (3) + 50$

$$R'\Big|_{x=40} = \frac{-15}{((40)(3)+1)^2} \cdot 3 + 50$$

$$\overline{MR}\Big|_{x=40} = \frac{-45}{14641} + 50 = -0.0031 + 50 = 50.0031$$

v.imp $\Rightarrow$ The explanation: The revenue of selling unit # 41 will increase the revenue by \$50.0031 approximately.

(Exact $\overline{MR} = R(41) - R(40) \approx R'(40)$)
approximately

43/604 : $P = \dfrac{200,000}{(q+1)^2}$: 1- what is the rate of change of price respect to q when $q = 49$

$\Rightarrow$ rate of change $= \dfrac{dP}{dq} = \dfrac{-400,000}{(q+1)^3}$

$$\frac{dP}{dq}\Big|_{q=49} = \frac{-400,000}{125,000} = -3.2 \text{ \$ per unit}$$

(x=49)

إذا صار الطلب ع الوجبة 50 ح رح يزيد 3.2 $

24/610 : (Find the derivative) : ⇒ from: $\boxed{9.7}$ Using Derivatives Formulas

أسرع طريقة ⇍ توزيع القوة

$$y = \left(\frac{5 - x^2}{x^4}\right)^3$$

أو:

$$y = \left(\frac{5}{x^4} - \frac{1}{x^2}\right)^3$$

$$y' = 3\left(\frac{5}{x^4} - \frac{1}{x^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{-20}{x^5} + \frac{2}{x^3}\right)$$

$\boxed{9.8}$ Higher order derivatives. (المشتقات العليا)

If $y = f(x) \Rightarrow y' = f' = \dfrac{dy}{dx}$

1st derivative of $f(x)$ with respect to x.

$$(y')' = (f')' = \frac{d^2y}{dx^2} \qquad \left(\frac{د^2ص}{دس^2}\right)$$

Second derivative of $f(x)$ w.r.to x

$$f''''(x) = f^{(4)}(x)$$

(لازم مع قوس)

Ex: ① $f(x) = x^3 + 10x^2 + 5$

$$f'(x) = 3x^2 + 20x$$

$$f''(x) = 6x + 20$$

$$f^{(3)}(x) = 6$$

$$f^{(4)}(x) = 0.$$