Chapter 6: The laplace Transform

6.1: Definition of the laplace Transform

- هناك صورة عامة لـ laplace :-

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt = F(s)$$ ← بطلع دالة بدلالة s

← لكل function صورة لـ laplace نوخذها موجودين بالملخص وحفظ

الـ laplace بتوزع على الجمع بس مش على الضرب

- **Examples:-**

$$\mathcal{L}\{\cosh(3t)\} = \frac{s}{s^2-9}$$

$$\mathcal{L}\{t^7\} = \frac{7!}{s^8}$$

$$\mathcal{L}\{2\pi\} = \frac{2\pi}{s}$$

⚠ **ملاحظة**: في الاقترانات المثلثية الـ cos و sin الهم lap.Tran

بس $\sin^2$, $\cos^2$ مالهم الهم فلازم نفككهم باستعمال المتطابقات المثلثية

$$\cos 2t = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$$

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

Scanned by CamScanner

6.2: The Solution of IVP:

• بيمكننا استعمال الـ laplace لكل المعادلات التفاضلية بس قبل لازم نعرف كيف نستعمل الـ laplace inverse

← عشان نوجد الـ inverse في أكثر من حالة :-

① بيكون الـ function واضح (يعني صورة واضحة) عندها نحدد الـ a و b (ان وجدت) ثم نكتب الـ function

Examples:-

صون الـ $a=1$ اذن

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] = \sin(1)t = \sin t$$

$$\frac{2!}{2!}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right] = \frac{t^2}{2}$$

• لاحظ قوة الـ s

معناها الاقتران t قوة اشي وعنا أنه القانون

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{n!}{s^{n+1}}\right] = t^n$$

لاحظ

$n+1=3$

$\boxed{n=2}$

بس لازم نضرب ونقسم على $2!$

② بيكون اقترانين ولازم نفصلهم (يا فصل مباشر يا باستخدام (Partial functions

Examples:-

فصل مباشر

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4s-2}{s^2-4}\right] = 4\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2-4}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2-4}\right]$$

$$= 4\cosh 2t - \sinh 2t$$

Partial function

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+3s-4}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s+4)(s-1)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{s+4} + \frac{B}{s-1}\right]$$

Scanned by CamScanner

$$2 = A(S-1) + B(S+4)$$

let $S = 1$

$$2 = 0 + 5B$$

$$\boxed{B = \frac{2}{5}}$$

let $S = -4$

$$2 = -5A + 0$$

$$\boxed{A = \frac{-2}{5}}$$

اذًا :

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-2}{5(S+4)} + \frac{2}{5(S-1)}\right]$$

$$= -\frac{2}{5}e^{-4t} + \frac{2}{5}e^{t}$$

---

* مراجعة لقوانين الـ Partial.Frs

- يجب ان تكون الاقترانات في المقام :- اقترانات لا يمكن تحليلها، محصولة
- في حالة الاقتران :◦الخطي : نضع Constant

◦التربيعي ← يحلل ← كلله الى خطي ← Constant

مثال S^2+1 ، S^2+2S+2 ← لا يحلل ← نضع في البسط $As+B$ (الصورة العامة للخطي)

◦ اي اقتران بدرجة أعلى يحلل ← نحلله

← لا يحلل ← نضع في البسط الاقتران الاقل درجة (الصورة العامة)

- في حالة الاقتران الذي لا يحلل وعليه قوة :- $(S-3)^3$ ، $(S^2+1)^2$

عندها :

$$\frac{1}{(S-3)^3} = \frac{A}{(S-3)} + \frac{B}{(S-3)^2} + \frac{C}{(S-3)^3}$$

$$\frac{1}{(S^2+1)^2} = \frac{Bs+C}{S^2+1} + \frac{Ds+E}{(S^2+1)^2}$$

← عندما أننا نستعمل الـ laplace كل المعادلات يجب حفظ الـ Transform لكل مشتقة :-

- $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$
- $\mathcal{L}\{y'(t)\} = Y(s)\,S - y(0)$
- $\mathcal{L}\{y''(t)\} = Y(s)\,S^2 - S\,y(0) - y'(0)$

◦ القاعدة العامة أنو أول حد عبارة عن Y مضروبة في S قوة بنفس درجة المشتقة بعدها في كل حد قلل درجة قوة S وزيد درجة مشتقة الـ y

خطوات حل المعادلة مع مثال :-

① نأخذ laplace الطرفين

$$y'' + 2y' + y = 4e^{-t}$$

$y(0) = 2$

$y'(0) = -1$

$$\mathcal{L}\{y''\} + 2\mathcal{L}\{y'\} + \mathcal{L}\{y\} = 4\mathcal{L}\{e^{-t}\}$$

② نكتب صورة كل اقتران ومشتقة

$$Ys^2 - sy(0) - y'(0) + 2[Ys - y(0)] + Y = 4\frac{1}{s+1}$$

③ نعوض قيمة $y(0)$ و $y'(0)$ ونجعل Y في طرف

$$Ys^2 - 2s + 1 + 2[Ys - 2] + Y = \frac{4}{s+1}$$

$$Y(s^2 + 2s + 1) - 2s + 1 - 4 = \frac{4}{s+1}$$

$$Y(s^2 + 2s + 1) - 2s - 3 = \frac{4}{s+1}$$

$$Y = \frac{\frac{4}{s+1} + 2s + 3}{s^2 + 2s + 1}$$

$$Y = \frac{\frac{4}{s+1} + 2s + 3}{(s+1)^2} = \frac{4}{(s+1)^3} + \frac{2s}{(s+1)^2} + \frac{3}{(s+1)^2}$$

لـ وحد المقام

$$Y = \frac{4 + 2s(s+1) + 3(s+1)}{(s+1)^3}$$

$$= \frac{7 + 5s + 2s^2}{(s+1)^3}$$

الآن نستعمل الـ Partial fraction

$$\frac{7+5s+2s^2}{(s+1)^3} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{(s+1)^3}$$

$$7+5s+2s^2 = A(s+1)^2 + B(s+1) + C$$

let $s=-1$

$7-5+2 = 0+0+C$

$\boxed{C=4}$

let $s=1$

$14 = 4A+2B+4$

$10 = 4A+2B$

$\boxed{5 = 2A+B}$ — (2)

let $s=0$

$7 = A+B+4$

$\boxed{A+B=3} \longrightarrow (1)$

حل ① و ②

$5 = 2A+B$

$3 = A+B$ −

$\boxed{2=A}$

$\boxed{B=1}$

so, $Y = \frac{2}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{4}{(s+1)^3}$

ع ناخذ lap. inverse للطرفين لايجاد y (الحل)

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y\} = y = 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s+1)^3}\right\}$$

shifting

مشروع بحرف

$$y = 2e^{-t} + e^{-t}t + \frac{4}{2!}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2!}{(s+1)^3}\right]$$

$$\boxed{y = 2e^{-t} + e^{-t}t + 2t^2e^{-t}}$$

Scanned by CamScanner

6.3: Step function + 6.4

1st Translation Theom

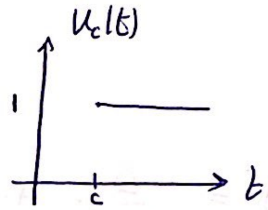
$$\mathcal{L}\left[e^{at} f(t)\right] \rightarrow \boxed{F(S-a)} \rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[F(S-a)\right] = e^{at}\,\mathcal{L}^{-1}\left[F(S)\right]$$

مثال :

- $\mathcal{L}\left[e^{-2t} t^{3}\right] = \mathcal{L}\left[t^{3}\right]_{S \to S+2} = \dfrac{3!}{(S+2)^{4}}$
- $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{2}{(S-3)^{2}}\right] = 2\,\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(S-3)^{2}}\right] = 2e^{3t}\,\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(S)^{2}}\right] = t\,(2e^{3t})$

Step function:

$$U_c(t) = \begin{cases} 0, & t < c \\ 1, & t \geq c \end{cases}$$



Compact form:

- عند استخدام الـ step function للكتابة الدوال functions على صورة الـ compact .

The Main Rule:

$$f(t) = \begin{cases} g(t), & 0 \leq t < c \\ h(t), & t \geq c \end{cases} \equiv f(t) = g(t) + \big(h(t) - g(t)\big)\,U_c(t)$$

نستخدمها عند حل المعادلات التفاضلية

The Relation Between U and e

- $\mathcal{L}\left[f(t-c)\,U_c(t)\right] = e^{-cs} F(s)$
- $\mathcal{L}\left[g(t)\,U_c(t)\right] = e^{-cs}\,\mathcal{L}\left[g(t+c)\right]$
- $\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-cs} F(s)\right] = U_c(t)\, f(t-c)$

Scanned by CamScanner

$\boxed{3}$ $y'' + 4y = \sin t + u_{2\pi}(t)\sin(t-\pi)$

$y(0) = y'(0) = 0$

① نأخذ laplـ الطرفين

$$\mathcal{L}[y''] + 4\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}\{\sin t\} + \mathcal{L}\{u_{2\pi}(t)\sin(t-\pi)\}$$

$$Ys^2 - s\cancel{y(0)}^0 - \cancel{y'(0)}^0 + 4Y = \frac{1}{s^2+1} + e^{-2\pi t}\mathcal{L}[\sin(t-\pi)]_{t \to t+2\pi}$$

$$Y(s^2+4) = \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi t}\mathcal{L}\{s$$

$$Y(s^2+4) = \frac{1}{s^2+1} + \frac{-e^{-\pi t}}{s^2+1}$$

$$Y = \frac{1-e^{-\pi t}}{(s^2+4)(s^2+1)}$$

نقوم بعمل Partial Fr. لـ $\frac{1}{(s^2+4)(s^2+1)}$:

$$\frac{1}{(s^2+4)(s^2+1)} = \frac{As+B}{s^2+4} + \frac{Cs+D}{s^2+1}$$

$$1 = (As+B)(s^2+1) + (Cs+D)(s^2+4)$$

let $s=0$

$\boxed{1 = B + 4D}$ — ①

let $s=-1$

$\boxed{1 = -2A + 2B - 5C + 5D}$ — ③

let $s=1$

$1 = (A+B)(2) + (C+D)(5)$

$\boxed{1 = 2A + 2B + 5C + 5D}$ — ②

let $s=2$

$1 = (2A+B)(5) + (2C+D)(8)$

$\boxed{1 = 10A + 5B + 16C + 8D}$ — ④

solve ② and ③

$2 = 4B + 10D \Rightarrow 1 = 2B + 5D$ ← solve with ①

Scanned by CamScanner

$$2 = 2B + 8D$$
$$1 = 2B + 5D \quad -$$
$$1 = 3D$$
$$\boxed{D = \frac{1}{3}}$$

$$2 = 2B + \frac{8}{3}$$
$$\frac{6}{3} - \frac{8}{3} = 2B$$
$$\boxed{B = -\frac{1}{3}}$$

Back to Eq 3 and 4

$$1 = -2A - \frac{2}{3} + -5C + \frac{5}{3}$$
$$0 = -2A - 5C$$
$$\boxed{0 = 2A + 5C} \longrightarrow *$$

$$1 = 10A - \frac{5}{3} + 16C + \frac{8}{3}$$
$$\boxed{0 = 5A + 8C} \longrightarrow **$$

from $*$, $**$ A and C = 0

$$\text{so } Y = \left(\frac{1}{3(s^2+1)} - \frac{1}{3(s^2+4)}\right) - e^{-2\pi s}\left(\frac{1}{3(s^2+1)} - \frac{1}{3(s^2+4)}\right)$$

$$y = \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] - \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} - \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-2\pi s}\frac{1}{s^2+1}\right] + \frac{1}{3}\left[e^{-2\pi s}\frac{1}{s^2+4}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\sin t - \frac{1}{6}\sin 2t - \frac{U_{2\pi}(t)}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]_{t \to t-2\pi} + \frac{U_{2\pi}(t)}{3}\left[\frac{1}{s^2+4}\right]_{t \to t-2\pi}$$

$$= \frac{1}{3}\sin t - \frac{1}{6}\sin 2t - \frac{U_{2\pi}(t)}{3}\sin(t-2\pi) + \frac{U_{2\pi}(t)}{6}\sin 2(t-2\pi)$$

$$= \frac{1}{3}\sin t - \frac{1}{6}\sin 2t - \frac{U_{2\pi}(t)}{3}\sin(t) + \frac{U_{2\pi}(t)}{6}\sin 2t$$

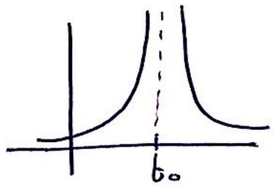
Scanned by CamScanner

6.5 : Impulse functions

• Dirac delta function

الصورة العامة :-

$$\delta(t-t_0) = \begin{cases} \infty & , t = t_0 \\ 0 & , t \neq t_0 \end{cases}$$



ملاحظات للحفظ :

① $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\, dt = 1$

② $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) f(t)\, dt = f(t_0)$

$\boxed{\text{Theom}}$ $\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-t_0 s}$

$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0) f(t)\} = e^{-s t_0} f(t_0)$

Examples: • $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\underbrace{\pi/3}_{t_0}) \underbrace{\sin t}_{f(t)}\, dt$

$= \sin(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

• $\mathcal{L}\{\delta(t-5)\} = e^{-5s}$

$\mathcal{L}^{-1}\{1\}$
$= \mathcal{L}^{-1}\{e^{-0(s)}\}$
$= \delta(t-0) = \delta(t)$

حل مثال :-

Solve: $\begin{cases} 2y'' + y' + 4y = 2\delta(t-\frac{\pi}{6})\sin t \\ y(0) = 0 \qquad y'(0) = 0 \end{cases}$

$2[Ys^2 - \cancel{y(0)s} - \cancel{y'(0)}] + Ys - \cancel{y(0)} + 4Y = \mathcal{L}\{2\delta(t-\frac{\pi}{6})\sin t\}$

$Y(2s^2 + s + 4) = \frac{2e^{-\pi/6}}{2}$

$Y = \dfrac{e^{-\pi/6}}{2s^2+s+4}$

إكمال المربع

$$2s^2+s+4 = 2\left(s^2+\frac{s}{2}+2\right)$$
$$= 2\left(s^2+\tfrac{1}{2}s+\frac{1}{16}-\frac{1}{16}+2\right)$$
$$= 2\left(s^2+\tfrac{1}{2}s+\frac{1}{16}+\frac{31}{16}\right)$$
$$= 2\left(\left(s+\tfrac{1}{4}\right)^2+\frac{31}{16}\right)$$
$$= 2\left(s+\tfrac{1}{4}\right)^2+\frac{31}{8}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y\} = y = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\frac{\pi s}{6}}}{2\left[\left(s+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{31}{16}\right]}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\pi/6\, s}}{\left(s+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{31}{16}}\right]$$

shifting صورة ال sin بس مع

$$y = \frac{1}{2}u_{\pi/6}(t)\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\left(s+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{31}{16}}\right]$$
$$= \frac{u_{\pi/6}(t)}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{31}{16}}}\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{\frac{31}{16}}}{\left(s+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{31}{16}}\right] \quad t\to t-\pi/6$$

$$\boxed{y = \frac{2u_{\pi/6}(t)}{\sqrt{31}}\,e^{-\left(\frac{t}{4}-\pi/6\right)}\sin\sqrt{\frac{31}{16}}\left(t-\pi/6\right)}$$

6.5: The Convolution function

→ The Convolution of f and g:

$$f*g = \int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau$$

$$\mathcal{L}\{f*g\} = \mathcal{L}\{f\}\,\mathcal{L}\{g\} = F(s)\,G(s)$$

نستطيع استعمال هذه القاعدة في حالة المعادلات
وعندما يكون هناك ضرب بين اقترانين نرجعهم إلى صيغة
ال Convolution وحل التكامل (حل أسهل)

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\,G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} * \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

Scanned by CamScanner

Solve : The integro-differential Eq

$$\begin{cases} y' - \frac{1}{2}\int_0^t (t-\tau)^2 y(\tau)\,d\tau = -t \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[y'] - \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[\int_0^t (t-\tau)^2 y(\tau)\,d\tau\right] = \mathcal{L}[-t]$$

$$Ys - y(0) - \frac{1}{2}\mathcal{L}[t^2 * y] = -\frac{1}{s^2}$$

$$Ys - 1 - \frac{1}{2}\mathcal{L}[t^2]\,\mathcal{L}[y] = -\frac{1}{s^2}$$

$$Ys - 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{s^3}\right)(Y) = -\frac{1}{s^2}$$

$$Y\left(s - \frac{1}{s^3}\right) = 1 - \frac{1}{s^2}$$

$$Y = \frac{\frac{s^2 \times 1}{1 \times s^2} - \frac{1}{s^2}}{\frac{s^3 \times s}{1 \times s^3} - \frac{1}{s^3}} = \frac{\frac{s^2-1}{\cancel{s^2}}}{\frac{s^4-1}{\cancel{s^3}}} = \frac{s(s^2-1)}{(s^4-1)}$$

$$Y = \frac{s\cancel{(s-1)(s+1)}}{\cancel{(s^2-1)}(s^2+1)} = \frac{s}{s^2+1}$$

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] = \cos t$$

Scanned by CamScanner