Chapter 7, 7.5 : systems of first Order linear Eqs

$\boxed{X' = Ax}$ ← الحل

مصفوفة

① نقوم بإيجاد محدده للمصفوفة $(rI - A)$

$$rI = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix}$$

$$rI - A = \begin{pmatrix} r-a_1 & -a_3 \\ -a_2 & r-a_4 \end{pmatrix}$$

$$|rI - A| = (r-a_1)(r-a_4) - a_2 a_3$$

نجد r (قيمتان لأنها معادلة تربيعية)

② لكل قيمة نجد k وذلك بتعويض r في المصفوفة $rI-A$ وحل المعادلة وإيجاد k_1 ثم k_2 ويكون الحل على شكل $y_h = c_1 e^{rt}(\ ) + c_2 e^{rt}(\ )$

مثال :-

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} X$$

$$(rI - A) = \begin{pmatrix} r-1 & -1 \\ -4 & r+2 \end{pmatrix}$$

$$|rI - A| = 0 \leftarrow \text{منها نجد قيم } r$$

$(r-1)(r+2) - 4 = 0$

$r^2 - r + 2r - 2 - 4 = 0$

$r^2 + r - 6 = 0$

$(r+3)(r-2) = 0$

$\boxed{r = 2, -3}$

$r = 2$:-

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$k_1 - k_2 = 0$

$-4k_1 + 4k_2 = 0$

$k_1 = k_2$

let $k_1 = 1 \Rightarrow k_2 = 1$

so for $r = 2 \Rightarrow k = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$r = -3$:-

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-4K_1 + K_2 = 0$
$-4K_1 - K_2 = 0$

let $K_1 = 1$

$K_2 = -4$ $\Rightarrow$ so for $r = -3 \Rightarrow K = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

The Solution is :- $\boxed{y_h = c_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$