

Chapter 5

Stat 2361

أصير النهائي
محمد الشريف

Discrete Random Variable

مراجعة عن ال discrete :-

في الشبيرة الأولى تم التمييز بين أنواع ال Variable وكانو

Quantitative ① Qualitative ②

وأيضا Quantitative يقسم إلى أرقام وهم

Continuous

لاكونه هذا النوع
يتم قياسه
مستمر

الرواتب 2000-4000
درجاته 30-35

Discrete

لاكونه هذا النوع
يتم قياسه
منفصل

عدد أفراد الأسرة ← 1, 2, 5, 7, ...

العملة ← 50, 100, 200, ...

الوزن ← 1, 2, 3, 4, 5, ...

①

فهذا المتغير سوف يكونه اكل فقط عند

Discrete Random Variable.

متغير عشوائي منفصل Random Variable

* A numerical description of an outcomes of a random experiment

بعبارة اخرى وهذا يشير للنتائج المتقطعة

اي: عند ابي تجربة تكونه هناك نتائج (outcomes)

الفكرة من ال Random Variable هي ربط هذه النتائج

بأرقام بعكس ذلك مثاليه ذلك:

عند الغاء قطعه زجاج صردين تكونه النتائج كالتالي

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

يتم اعتبار ظهور العملة رقم \pm ظهور مرثا رقم \pm كالتالي

$$\begin{aligned} HH &\rightarrow 2 \\ HT &\rightarrow 1 \\ TH &\rightarrow 1 \end{aligned}$$

$$TT \rightarrow 0$$

(2)

المعبره هذه الارقام المنفصل
على بعكس النتائج

من آخره إعطاء أعلى علامة في الـ 1 رقم 1 هذا يدل

على أنه الطالب الحاصل رقم 1 هو صاحب أعلى علامة

وهذا هو المفهوم Random Variable

Ex: Roll two die

$$S = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4) \dots (6,6) \}$$

$$\#S = 6 \times 6 = 36 \quad \left. \vphantom{\#S} \right\} \text{ عدد النتائج القائم هو } 36$$

Define the Random Variable X to be
the sum of the 2 faces

حسب هذا المثال تم اعتبار الـ R.V هو عبارة عن حالة
لكل الصور في القائمة

$$(1,5) \Rightarrow 6$$

$$(6,6) \Rightarrow 12$$

$$(4,5) \Rightarrow 9$$

If we define the R.V Y to be
the Absolute difference between
two faces

$$(1,5) \Rightarrow 4$$

$$(6,6) \Rightarrow 0$$

$$(4,5) \Rightarrow 1$$

(3)

حسب المثال السابق تلاحظ انه حسب الاتفاقة عليه في هذا السؤال

في الحالة ~~الاولى~~ تم التعرف على ان X هو

هو الثاني $\leq \leq \leq \leq$ مجموع مطلقه

Ex: Roll two dice If we Let

$X =$ Sum of the 2 face, what the value of X will be

فقط نرد
السؤال يقول انه تم الفاء ~~فقط نرد~~ وتم الانصاف X انه
 X هو حاصل جمع الوجهين القابلين فيما في X الي سوف نعد
اكثر

فيم X سوف تكون $(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12)$

لان مجرد النرد مكونه من $(1-6)$ اذا اقل رقم هو

2 اي جاي من $1+1$ واكبر رقم هو 12 اي جاي
حس $6+6$

$X = 2, 3, 4, 5, \dots, 12$

(4)

حساب احتمال السابقة:

Probability Distribution

هذا الجدول يسمى:

$$X \quad f(x) = P(X=x)$$

2	$P(X=2)$: طالوا اضرار ان يكونوا يجمعون 2 لنوعين غير ادا ساديين	$= \frac{1}{36}$
3	$P(X=3)$ صا صا اضرار ان المجموعه ساديين 3 وصاير جايي من (1+2) و (2+1)	$= \frac{2}{36}$
4	(2,2) (1,3) (3,1)	$\frac{3}{36}$
5	(3,2) (2,3) (4,1) (1,4)	$\frac{4}{36}$
6	(3,3) (5,1) (1,5) (4,2) (2,4)	$\frac{5}{36}$
7	:	$\frac{6}{36}$
8	:	$\frac{5}{36}$
9	:	$\frac{4}{36}$
10	:	$\frac{3}{36}$
11	1	$\frac{2}{36}$
12	(6,6)	$\frac{1}{36}$

$P(X=x) = f(x) =$ the Probability of that

the random variable (X) assume the value of x

\equiv the Probability function

$$0 \leq f(x) \leq 1$$

$$\sum f(x) = 1$$

Let X be a Discrete Random Variable (DRV)

With the Probability function $f(x)$

$X = \{x_1, \dots, x_n\}$ then

① The expected value of X , $E(x)$ is defined by:

$$E(x) = \sum x f(x)$$

$E(x)$:
به نفس صفت ال
Mean
متوسط

② The Variance of X , $Var(x)$ is defined by:

$$Var(x) = \sum (x - E(x))^2 f(x)$$

③ The Standard deviation ($\sigma(x)$) is defined by:

$$\sigma = \sqrt{Var(x)}$$

$$S.D = \sqrt{Variance}$$

هذه أمثلة فوائدها
الخامسة

Example 8 Toss a Coin 3 times and

Define the R.V (X) to be the number of heads find the $E(x)$, $Vor(x)$, $Std(x)$

اكثر

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2 \times 2 \times 2$$

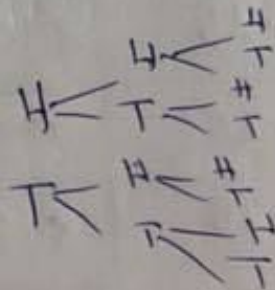
اولاً يجب معرفة عدد النتائج وهو

ثانياً إيجاد قيم X وفيكون ($\frac{0}{\text{وه مزة}} \text{, } \frac{1}{\text{مزة واحد}} \text{, } \frac{2}{\text{مريتا}} \text{, } \frac{3}{\text{ثلاث مرات}} \text{)$
 (TTT) (HTT) (HHT) (HHH)

ثالثاً نقل جدول وهو

X	f(x)
0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{3}{8}$
2	$\frac{3}{8}$
3	$\frac{1}{8}$

هذا الجدول قد يكون معقد
 واذا مشر معقد يتم إيجاد
 بناءً على النتائج القائمة ونوعها
 من العينة



$$\textcircled{1} E(X) = \sum X f(x)$$

صناديق الالف

X	f(x)	X f(x)
0	1/8	0
1	3/8	3/8
2	3/8	6/8
3	1/8	3/8

$$\frac{12}{8} \text{ Total}$$

$$E(X) = \frac{12}{8} = 1.5$$

$$\text{Var}(X) = \sum (X - E(X))^2 f(x)$$

X	X - E(X)	(X - E(X))^2	(X - E(X))^2 * f(x)	f(x)
0	-1.5	2.25	0.28125	1/8
1	-0.5	0.25	0.09375	3/8
2	0.5	0.25	0.09375	3/8
3	1.5	2.25	0.28125	1/8

$$\text{Total} = 0.75$$

$$\textcircled{3} \text{S.d} = \sqrt{0.75}$$

$$\text{Var}(X) = 0.75$$

②

$$E(x) = \sum x f(x) \quad , \quad E(y) = \sum y f(y)$$

$$E(x) + E(y) \\ = \sum x f(x) + \sum y f(y)$$

$$X \xrightarrow{\text{بعد تحويل إلى } \bar{x}} X^2$$

ليصبح قانونه $E(X^2)$ كما يلي :

$$E(X^2) = \sum X^2 f(x)$$

بالنسبة لقانون الـ Variance هو

$$\text{Var}(x) = \sum (x - E(x))^2 f(x)$$

$$\text{Var}(x) = E \underline{\underline{X^2}} - (E(x))^2$$

$$\textcircled{1} E(X) = \sum X f(x)$$

$$\textcircled{2} \text{Var}(X) = \sum (X - E(X))^2 f(x)$$

$$\textcircled{2} \text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \quad \left. \vphantom{\text{Var}(X)} \right\} E(X) = \sum X f(x)$$

$$\textcircled{3} \sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

$$\textcircled{4} CV = \frac{\text{S.d}}{\mu} \times 100\% = \frac{\sqrt{E(X^2) - (E(X))^2} \times 100\%}{\sum X f(x)}$$

Ex: Consider the following distribution:

X	f(x)
-2	0.1
-1	0.05
0	0.35
2	0.2
3	0.3

$$\text{① find } P(X=2)$$

$$P(X=2) = 0.2 \quad \text{من الجدول مباشرة}$$

$$\text{② find } P(X \geq -1)$$

صياغة المناهض

$$P(-1) + P(0) + P(2) + P(3)$$

أو بصيغة أخرى

$$1 - P(-2)$$

$$= 0.9$$

$$\text{③ } E(X)$$

$$E(X) = \sum X f(x)$$

$$E(X) = 1.05$$

X	f(x)	Xf(x)
-2	0.1	-0.2
-1	0.05	-0.05
0	0.55	0
2	0.2	0.4
3	0.3	0.9
TOTAL		1.05

4) $\text{Var}(x)$

$$\text{Var}(x) = \sum (x - E(x))^2 f(x)$$

x	$x - E(x)$	$(x - E(x))^2$	$f(x)$	$(x - E(x))^2 f(x)$
-2	-3.05	9.3025	0.1	0.93025
-1	-2.05	4.2025	0.05	0.210125
0	-1.05	1.1025	0.5	0.55125
2	0.95	0.9025	0.2	0.1805
3	1.95	3.8025	0.5	1.90125

2.8475

ولكن هذا بالترتيب الاحادي ويمكننا ان نجاءه من خلال القانون الثاني

$$\text{Var} = E(x^2) - E(x)^2$$

$$= 3.95 - (1.05)^2$$

$$= 2.8475$$

نفس النتيجة

ويفضل بهذه اكمال القانون الثاني (ن)

+ اقل راتل معضيا

(12)

$$E(x^2) = \sum x^2 f(x)$$

x	x^2	$x f(x)$
-2	4	0.4
-1	1	0.05
0	0	0
2	2	0.4
3	9	2.4
Total		3.95

$$E(x) = \sum x f(x) = 1.05$$

Ex 3

number of house sold	number of day	$P(X=x)$ or $f(x)$
0	60	$\frac{60}{200} = 0.3$
1	80	$\frac{80}{200} = 0.4$
2	40	$\frac{40}{200} = 0.2$
3	16	$\frac{16}{200} = 0.08$
4	4	$\frac{4}{200} = 0.02$
T: 200		

(1) What is the Probability of sell at least 1 house

$$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) \underline{\underline{= 1}} \quad 1 - f(0)$$
$$1 - 0.3 = \boxed{0.7}$$

(2) What the expected number of house sell

$$E(X) = \sum X f(x)$$
$$= (0 \times 0.3) + (1 \times 0.4) + (2 \times 0.2) + (3 \times 0.08) + (4 \times 0.02)$$

$$\boxed{1.3} \quad \boxed{= 1.12}$$

Binomial Random Variable

المفهوم Binomial في التجارب التي تهل مرتين ^{عند}

الامتلاك ويكون النتائج فقط فقط نتيجتين ^{التي}

منها ذلك الفاعله فقد لم مرات فالنتائج في كل
مره في حوره او كتابه

تقديم : امتحانه تكونه النتائج ناجح او راسب

البنجاب عند المرأة تكونه النتائج ولد او بنت

ويكون

الفاعل فاعله نرد تكونه النتائج 1, 2, 3, 4, 5, 6 اذا في

ليس Binomial

Binomial:

(1) The experiment consists of n trials and n must be $(n > 2)$

عدد مراتب
التجارب

(2) In each trial two outcomes are possible, success or fail

(3) The probability of success is P and the probability of fail $1-P$ are constant on each trial

ثابت

كيف يفيد ثابت: اجاب طغز ولد هو $\frac{1}{2}$

سؤال: امل تجربة حل اذ في التجربة رقم مليون هو $\frac{1}{2}$

* القاد فقه نقد 1000 مرة في كل مرة افعال المور هو $\frac{1}{2}$

(4) the trials are independent

امل مرة بطل مورة
لا يعني في امره الثانيه كتابه
كل تجربة منفصله عن
الثانيه

Binomial $\xrightarrow{\text{ليجزاه كانه}} X = B(n, p)$

Binomial

عدد
مرات
التجارب

احتمال
صحيح كل
تجربة
وهو p
ما هو حرف p
 X

Ex: Multiple Choice exam, 50 questions
with 5 answers of each question

Let $X =$ number of correct answers

$$X = B\left(50, \frac{1}{5}\right)$$

ليش $\frac{1}{5}$ لانو عندك 5 اجوبة احتمال انه يكون صحيح

هو $\frac{1}{5}$ و لان اذا كانت X اصله انه يكون عندنا

في $\frac{4}{5}$ وتايبه في ال 50 سوال

Let $X = B(n, p)$ then: القوانين

① The Probability function for X

~~$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$~~

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$n = \#$ of trials = n

$X = \#$ of success

$f(x) =$ the probability of x -success

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{(n-x)! x!}$$

② The expected value of X

$$E(X) = nP$$

④ Std = $\sqrt{\text{Varianc}}$

③ The Variance of X

$$\text{Var}(X) = \binom{n}{1} p (1-p)$$

⑦

Ex:

Toss a Coin 12 times and $p = 0.5$

find:

① $\#S = 2^{12} = 4096$

② How X is distributed

$$X = B\left(12, \frac{1}{2}\right)$$

③ Write the Probability function

$$f(x) = \binom{n}{x} (p)^x (1-p)^{n-x}$$

$$f(x) = \binom{12}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{12-x}$$

$$f(x) = \binom{12}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{12-x}$$

③ find the $E(x)$

$$E(x) = np$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)(12) = \boxed{6}$$

④ $\text{Var}(x) = (n)(p)(1-p) = (12)\left(\frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right) = (12)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \boxed{3}$

(18)

⑤ find the probability of exactly 8 head
 ~~$f(8)$~~ $f(8)$

$$f(8) = \binom{12}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^8 \left(\frac{1}{2}\right)^{12-8} =$$

$$\binom{12C8}{219612} \left(\frac{1}{2}\right)^8 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0.12$$

⑥ find the probability of Less 2 head

12/15 جز 2 head یعنی 2 سے زائد اور وہ عبارتہ عن

$$1 - (P(0) + P(1)) \quad \left. \begin{array}{l} f(2) + f(3) + f(4) + \dots + f(12) \\ \text{وہی اہولہ صحت} \end{array} \right\}$$

$$1 - (f(0) + f(1))$$

طریقہ دوا

طریقہ 2

~~طریقہ دوا~~

$$f(0) = \binom{12}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{12-0} = \text{○} \quad \text{○} \quad \text{○}$$

$$f(1) = \binom{12}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{11} = \text{○} \quad \text{○} \quad \text{○}$$

79

⑦ find the probability at Most 3 head

اعبرني تكونه 3 head

$$f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$$

وخذ كل واحد من هذا القانون

⑧ find the probability No more than 2

من اكثر من 2

$$f(0) + f(1) + f(2)$$

No more than 2 \Rightarrow At Most 2