

Chapter 6:

Stat 2361

أحمد النابك

محمد الشريف

### Continuous Random Variable

المفهوم: Continuous هو الذي تكون فيه الفتر عبارة:

عن فترات interval من ذلك

الراتب 2000 - 4000

درجة اعراض 35 - 38

فهذه الاماكن تكون الاحتمال P عبارة عن المساحة

Total Probability = Area

ملاحظة: في ال Continuous المساحة

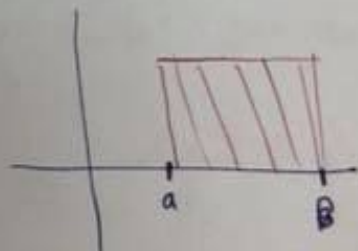
في طرف التباين لا تؤثر في المساحة

تماماً في ال Discrete

|                   |
|-------------------|
| $a \leq x \leq b$ |
| $a < x < b$       |

نفس  
الشيء  
في

ال Continuous ①



هذه المساحة هي الاحتمال

ولكن حسب الشارح الخامس ان Discrete المسألة هي  
جداً وتغير في المل.

In Continuous Probability function

$f(x) \geq 0$  السبب لان الاحتمال هو مساحه ولا يوجد مساحه بالسالب

$\sum f(x) = 1 = \text{Total Area}$

Two type of Continuous:

6.1] Uniform  
Distribution

6.2] Normal  
Distribution

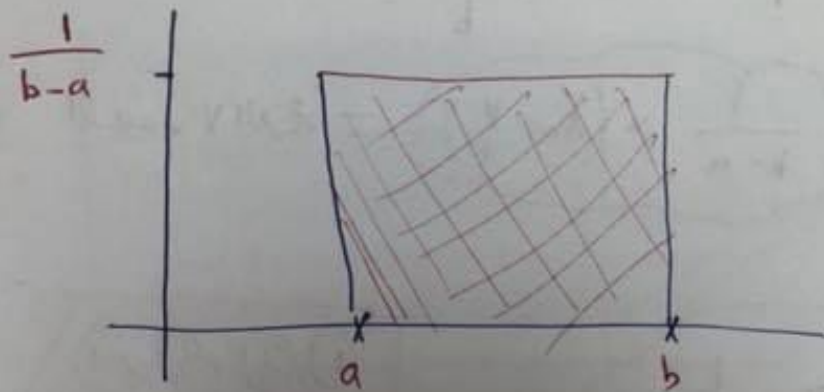
## 6.1) Uniform Random Variable :-

A uniform random variable  $X$  over an interval  $[a-b]$

↳  $X = U[a-b]$  is a continuous random variable

with probability function given by

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

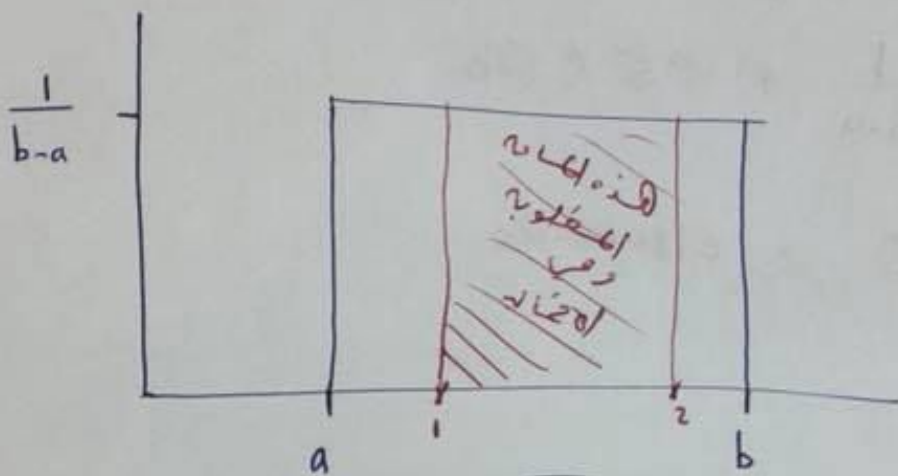


Area under the curve =  $\frac{1}{b-a} \times (b-a) = 1$

$$\boxed{1} = \cancel{b-a} \times \frac{1}{\cancel{b-a}} = \text{الطول} \times \text{الارتفاع} = (b-a) \times \frac{1}{b-a}$$

Let  $X = U[a, b]$  then  $\rightarrow$  Uniform مدى  
متساوية  
الفترة

$$\textcircled{1} P(x_1 \leq X \leq x_2) = (x_2 - x_1) * \frac{1}{b-a}$$



$$\frac{1}{b-a} * (x_2 - x_1) = \text{الطول} * \text{الارتفاع}$$

expectend

$$\textcircled{2} E(x) = \frac{a+b}{2}$$

①, ②, ③, ④

هذه هي قوانين الكل  
في الـ Uniform

$$\textcircled{3} \text{Var}(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\textcircled{4} \sigma(x) = \sqrt{\text{Var}(x)} = \frac{b-a}{\sqrt{12}} \quad \textcircled{4}$$

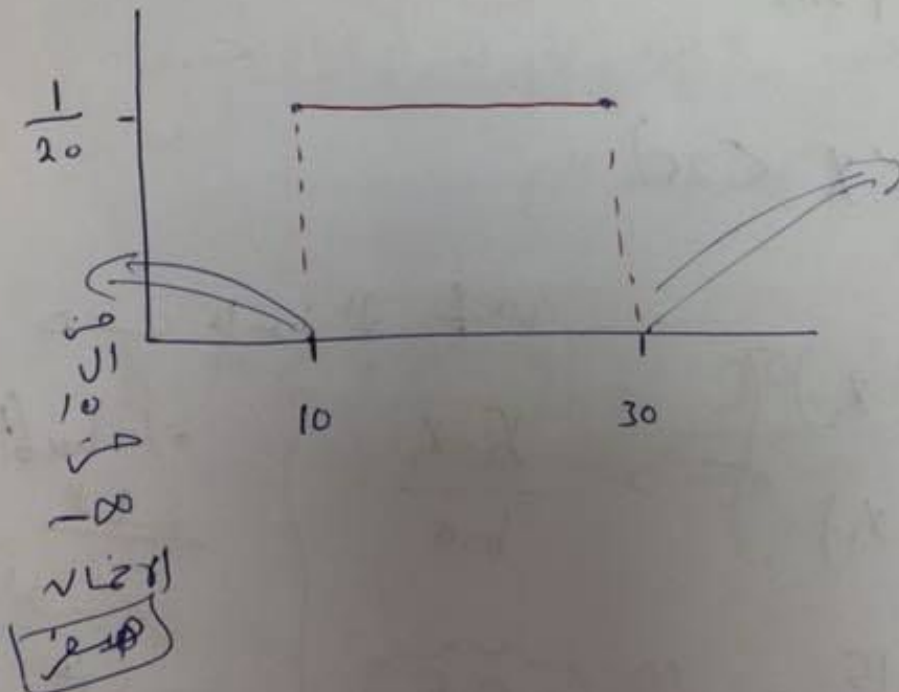
Ex: Let  $X = U [10, 30]$

① Write and graph the probability function:

Uniform من نه التوال ز وجود كالت U نوع ان هذا  
ولاكونه  $f(x)$  كالت

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{30-10} & , 10 \leq X \leq 30 \\ 0 & , \text{elsewhere} \end{cases}$$

الاتحاليات  
حدود الفترة  
صفر



من ال 30  
من ال 10  
الاتحاليات

2) find the expected value

$$E(x) = \frac{a+b}{2} = \frac{10+30}{2} = \frac{40}{2} = \boxed{20}$$

3) find the variance of  $X$

$$\text{Var}(x) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(30-10)^2}{12} = \frac{(20)^2}{12} = \frac{400}{12} = \boxed{33.3}$$

4) find the standard deviation

$$\sigma_x = \sqrt{\text{Var}} = \sqrt{33.3}$$

5) find  $P(15 < X < 25)$

$$\left. \begin{aligned} P(X_1 \leq x \leq X_2) \\ P(X_1 < x < X_2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$= \frac{25-15}{30-10} = \frac{10}{20} = \boxed{0.5}$$

حسب قانون ال Uniform

$$\frac{X_2 - X_1}{b - a}$$

المساحة  
تحت  
المنحنى

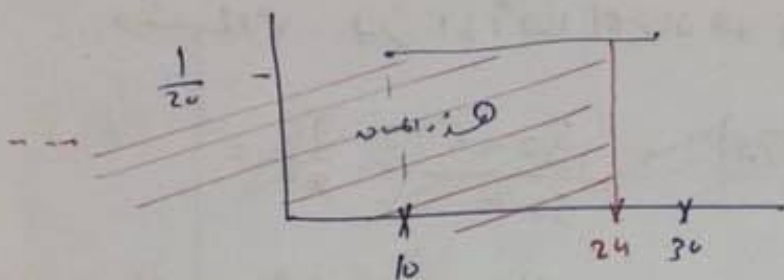
في  
ال

Continuity

6

$$\textcircled{6} \text{ find } P(X \leq 24)$$

المطلوب هو إيجاد الاحتمال اذا كانت افلامنا 24 ص  
الرم



ولكن الاحتمال لم يتغير،  $X$  افلامنا 10 هي الفترة اذا هي

$$P(10 \leq X \leq 24)$$

وهنا دائماً عندما يكون  $X$  افلامنا رقم اختيار الفترة من

بداية الفترة إلى ذلك الرمز

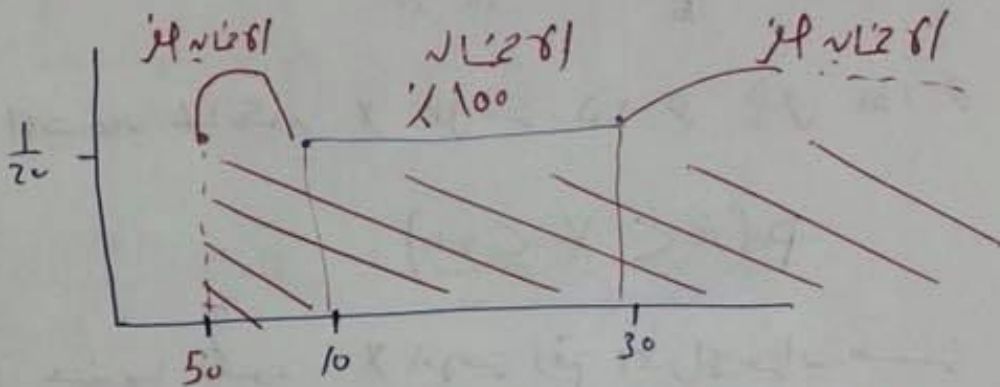
$$P(10 \leq X \leq 24) = \frac{24-10}{30-10} = \frac{14}{20} = \boxed{0.7}$$

$\textcircled{7}$

7) find  $P(X > 5)$

هنا نفس فكرة رقم 6 ولكن هنا لدينا دالة كثافة  
 نأخذ حتى نهاية الفترة ولكن من (5-10) خارج الفترة  
 ونسأله كيف إذاً هنا احتمال هو  $\frac{1}{100}$

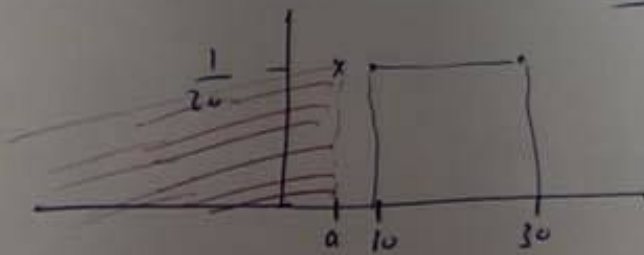
~~$P(5 < X \leq 20) = \frac{30-5}{30-10} = \frac{25}{20} =$~~



هذه المساحة المطلوبة إذاً هي  $\frac{1}{100}$

8) find  $P(X \leq 9)$

هنا الجواب صفر لأنه خارج الفترة



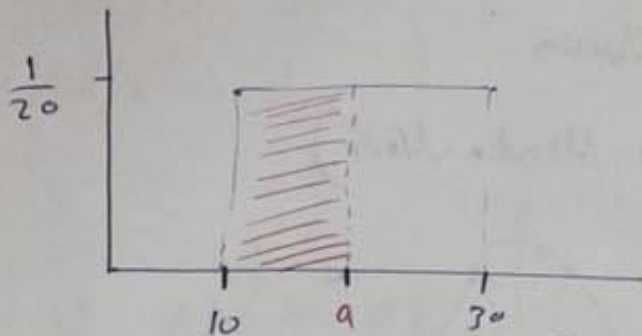
دائماً خارج حدود  
 الفترة هي  
 zero



(9) Find a such that

$$P(X < a) = 0.8 \quad 80\%$$

اكلو



$$\frac{a-10}{b-a} = 0.8$$

$$\frac{a-10}{30-10} = 0.8$$

$$\frac{a-10}{20} = 0.8$$

$$a-10 = 16$$

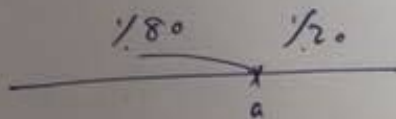
$$a = 26$$

ولا تفقه لامة

$$P(X < \frac{26}{a}) = P_{80} = 26$$

حسب هذا القول

$P_{80} \Rightarrow$  حسب  
النسبة  
الوقت



(9)

## 6.2 Normal Random Variable

التوزيع الطبيعي

شروط هذا التوزيع

- \* Bell-shape distribution
- \* Symmetric (Mean = Median = Mode)



$$\text{Let } X = N(\mu, \sigma)$$

$$\text{Let } X = \text{Normal}(\text{Mean}, \text{Standard Deviation})$$

# # The Standard Normal Distribution

≡ Normal Distribution With

$$\left. \begin{array}{l} \text{Mean } (\mu) = \text{Zero} \\ \text{S.D. } (\sigma) = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{كبت ان تكونه} \\ \text{مكنا} \end{array}$$

اذا "عند كل اذا تم اعطانا كذا

$$X = N(\mu, \sigma) \xrightarrow{\text{بم تحويل اى}} X = N(0, 1)$$

والترسية الوحدية التي تعرف خلال تحويل  $\mu$  الى  $0$

Z-score  $\mu$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

توضيح مع الامثلة  
أهـ



# Table:

الجدول ابي فيه فيتر  $Z$

خيهانه هذا ال Table

① كبت انه لا يكون صوره  $Z$ :

② يعطى المساحه من الناحيه الشمال (Area to Left of  $Z$ )

③ اقل مساحه معطى في الجدول هي  $1/50$  وفي حينها  $Z=0$

④ الازمام في الجدول عبارة عن مساحه

⑤ صيوع  $Z = \frac{\text{مساحه الـ } Z}{\text{مساحه اوراقه}}$

□, □□

لان احبباً نلزم الترتيب

1,567  $\Rightarrow$  1,57  
هنا الوجوده قيمه يكون

1,563  $\Rightarrow$  1,56

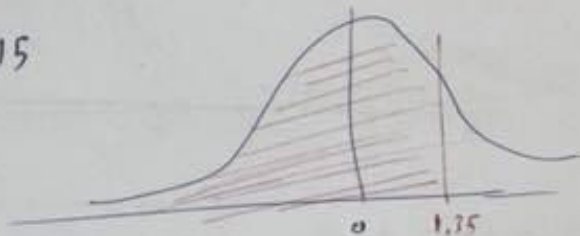
⑫

Ex: Use the Normal table to find:

$$\textcircled{1} P(Z < 1.35)$$

① عندما تكون الإشارة أقل من  $Z$  والرمز موجب هذه  
بئر فراكل مباشرة من الجدول ، صب الجدول

$$P(Z < 1.35) = 0.9115$$



$$\textcircled{2} P(Z < 2.34)$$

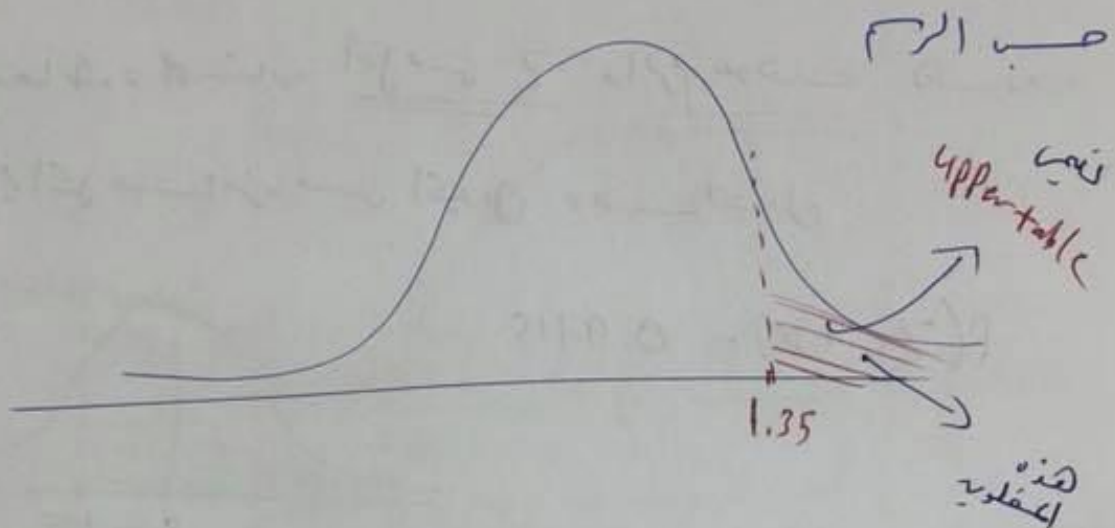
نفس الطريقة ولكن مباشرة لأننا أصغر من  $Z$  والرمز موجب  
① ②

$$0.9904 = P(Z < 2.34) \quad \text{صب الجدول}$$



$$\boxed{3} \quad P(Z > 1.35)$$

هذه الحالة عندما تكون الإشارة أكبر والرمز موجب



ولكن الجيد يعطين فقط القيمة بار  $Z$  إذاً هذه نحري ندي

$$1 - P(Z < 1.35)$$

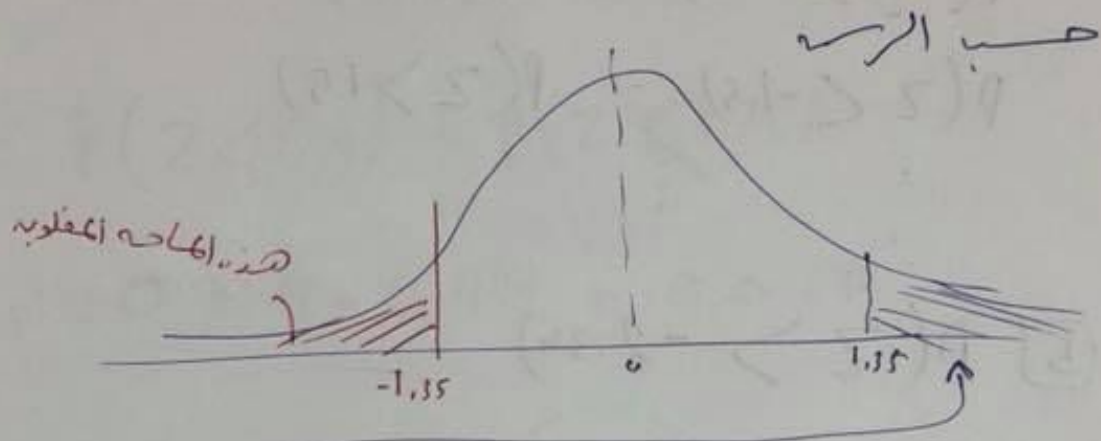
لأن المساحة كلها ناري  $\frac{1}{2}$  صحيح المساحة المطلوبة  $\frac{1}{2}$  واحد صحيح  
تأخذ ما قبل ال  $Z$

$$1 - P(Z < 1.35) =$$

$$1 - 0.9115 = 0.0885$$

$$(4) P(Z < -1.35)$$

هذه الاحصاء أصغر من 2 ولكن سالب



ولكن هذه هنا هو لا يكون صغائر اذاً هذه الاحصاء هو تقريبا الأكبر 1.35

$$P(Z < -1.35) = P(Z > 1.35)$$

حساب الاحصاء  
انسيبة

$$P(Z > 1.35) = 1 - P(Z < 1.35) =$$

$$1 - 0.9115 \\ = 0.0885$$

ملاحظة: إذا كانت الرقم سالب دائماً نحول هذا  
الرقم إلى موجب معكس الإشارة

$$P(Z > -2) = P(Z < 2)$$

$$P(Z < -1.5) = P(Z > 1.5)$$

⋮

$$\boxed{5} \quad P(Z > -2.34)$$

هذه الحالة أكبر من 0 وسالب أولاً نعكس السالب دائماً.

$$P(Z > -2.34) = P(Z < 2.34)$$

هذه تصبح نفس الحالة الأولى وهي

عنا الكيدون صبا منزه

$$P(Z < 2.34) = 0.9904$$

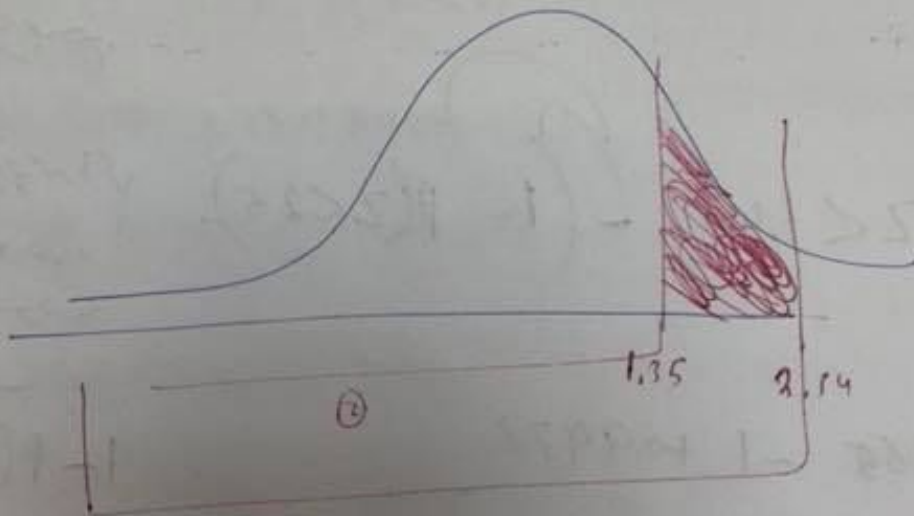


$$\textcircled{6} \quad P(1.35 < Z < 2.34)$$

في هذه الحالة دائماً نأخذ الرقم الأكبر نأخذ الرقم الأصغر

$$= P(Z < 2.34) - P(Z < 1.35)$$

$$= 0.9904 - 0.9115 = 0.0789$$



$$\textcircled{1} - \textcircled{2}$$

$$\textcircled{7} P(-2.5 < Z < -1.45)$$

نفس الفكرة: أولاً آخيتي في قاعدة الأكل ناقصاً

$$P(Z < -1.45) - P(Z < -2.5)$$

بعد ذلك نرجع إلى القوائم والحالات السابقة

$$P(Z > 1.45) - P(Z > 2.5)$$

لما أكبر إشارة  
بعكس الإشارة  
المعكوسة

$$(1 - P(Z < 1.45)) - (1 - P(Z < 2.5))$$

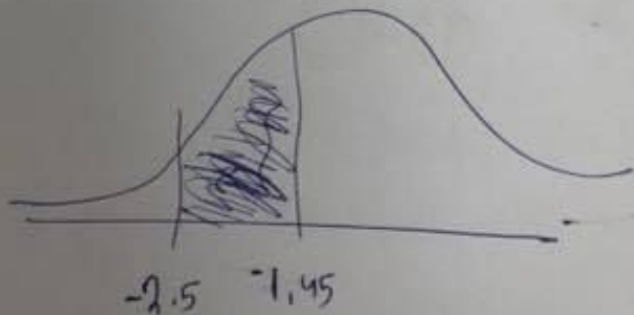
التحويل من الإشارة  
الأخذ في وجود  
إشارة موجبة  
لكون

$$1 - 0.9265 - 1 + 0.9938$$

$$1 - P(Z < \dots)$$

$$0.9938 - 0.9265$$

$$= 0.0673$$



$$\textcircled{8} P(-2 < Z < +1)$$

$$P(Z < 1) - P(Z < -2) \sim \textcircled{1} \text{ الفصل اكل}$$

$$P(Z < 1) - P(Z > 2) \sim \textcircled{2} \text{ قلب الاشارات}$$

$$P(Z < 1) - (1 - P(Z < 2)) \sim \textcircled{3} \text{ تحويل من الاكبر للثمنز}$$

$$P(Z < 1) - 1 + P(Z < 2)$$

$$= 0.8413 - 1 + 0.9772$$

$$= 0.8185$$

Ex: Use the normal table to find  $a$  such that

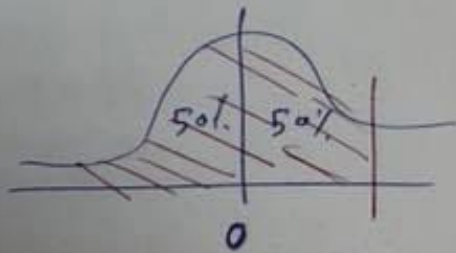
$$\boxed{1} \quad P(Z < a) = 0.9929$$

هذه الحالة عكس الأمثلة السابقة ،

لما ازديت آصغر من  $A$  إذا نزلت الارتفاع - بارنه و  $A$  عدد موجب  
لأنها 20% حال أكبر من 50%

$$\boxed{a = 2.45}$$

حسب الارتفاع

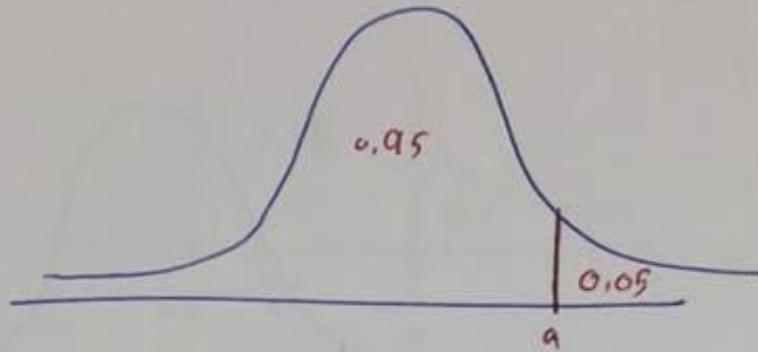


$$0.9929 = 99\% \text{ تقريباً}$$

إذاً هي فوق ال 50%

إذاً  $a$  هو عدد موجب

$$\textcircled{2} P(Z > a) = 0.05$$



حسب الجدول لا يوجد فيه قيم لي 0.05 لذا يعرف المسألة مع

بار ايجاد وهذا  $a$  في نفس  $P(Z < a) = 0.95$

بالجداول ايجاد لا نجد 0.95 بالزبط وانما قيم قريبة  
على ردي

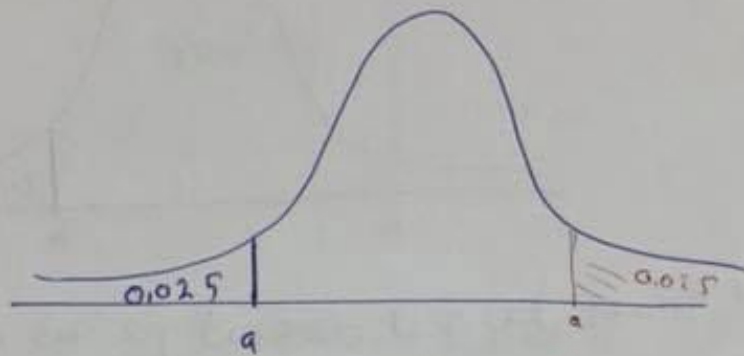
$$\begin{array}{r} 0.9505 \\ \hline z = 1.64 \end{array} , \begin{array}{r} 0.9495 \\ \hline z = 1.65 \end{array}$$

لهذا المسألة نأخذ ال Average

$$a = \frac{1.64 + 1.65}{2} = 1.645$$

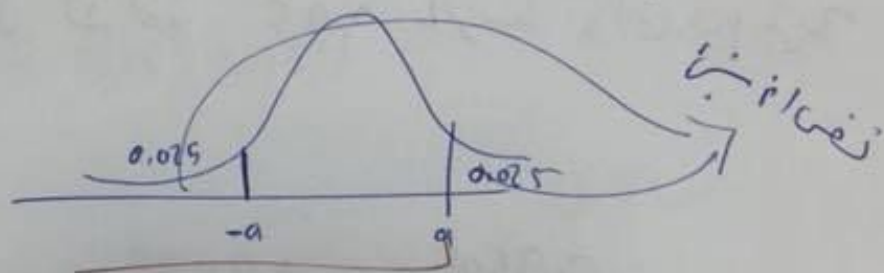
$$\textcircled{3} P(Z < a) = 0.025$$

عند نقطة الراس



حسب الرسم لا يوجد في الجدول صاحة 0.025 ولكن لدينا 0.020

بشكل مناسب نكرر في اليسار، بصادق مع العكس



صاحبة العكس في 0.975

حسب الجدول يدور مع العكس 0.975 وصحة

$$a = 1.96$$

ولكن نحن نأخذ  $a = -1.96$

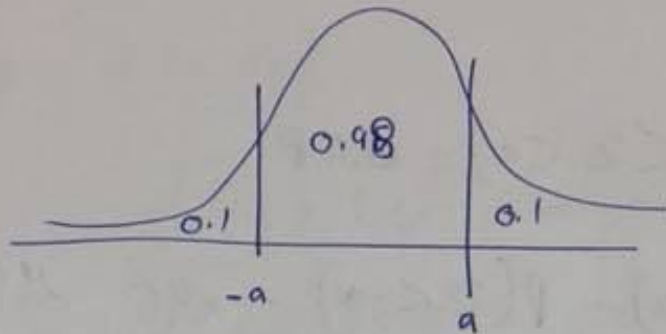
~~$$P(Z < 1.96) =$$~~

$$P(Z < -1.96) = 1 - P(Z < 1.96) = 0.025$$

~~$$= P(Z > 1.96)$$~~

22

$$(9) P(-a < Z < a) = 0.98$$



اكثر عن اربعة  
المر

نجد في  $a$  نلاحظ ان ~~الاحتمال~~  $a$  في

$$0.98 + 0.1 = 0.99$$

المطلوب هو

$$P(Z < a) = 0.99$$

ومن الجدول

$$a = 2.33$$

$$Z = \frac{0.98}{2} \approx 0.99$$

~~الجدول~~

$$0.991 \approx 0.99$$

اگر عنبر لایحه الفوارز  
السنه

$$P(-a < Z < a) = 0.98$$

$$P(Z < a) - P(Z < -a) = 0.98 \quad \textcircled{1} \text{ ایا بهرنا فداه هر}$$

$$P(Z < a) - P(Z > a) = 0.98 \quad \textcircled{2} \text{ کفر الساب}$$

اذا موصول

$$P(Z < a) - (1 - P(Z < a)) = 0.98 \quad \textcircled{3} \text{ نحویرا ابرال}$$

اخر

$$2P(Z < a) - 1 = 0.98$$

$$2P(Z < a) = 1.98$$

$$P(Z < a) = 0.99$$

اگر اکر

$$a = 2.33$$

نسب  
اکوای

24



Ex: Let  $X = N(50, 10) \Rightarrow N(\mu, \sigma)$

① find  $P(X > 68)$

بذلكه اكمال حسب ما هو شروع في P في التوزيع

بكت انه تحول ال  $\mu$  الى صفر عن ال ابتداء Z-score

$$P(Z > \frac{68 - 50}{10})$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$= P(Z > 1.8)$$

حسب القوانين السابقه

$$\textcircled{P(Z)} \quad 1 - P(Z < 1.8)$$

$$1 - 0.9841 = 0.359$$

~~P(X)~~

$$\textcircled{2} P(35 < X < 72)$$

$$P\left(\frac{35-50}{10} < Z < \frac{72-50}{10}\right)$$

$$P(-1.5 < Z < 2.2)$$

~~P(Z)~~

$$P(Z < 2.2) - P(Z < -1.5)$$

$$P(Z < 2.2) - (P(Z > 1.5))$$

$$P(Z < 2.2) - (1 - P(Z < 1.5))$$

$$0.9861 - 1 + 0.9332$$

$$= \boxed{0.9193}$$

$$\textcircled{3} \quad P(50 < X < 70)$$

$$P\left(\frac{50-50}{10} < Z < \frac{70-50}{10}\right)$$

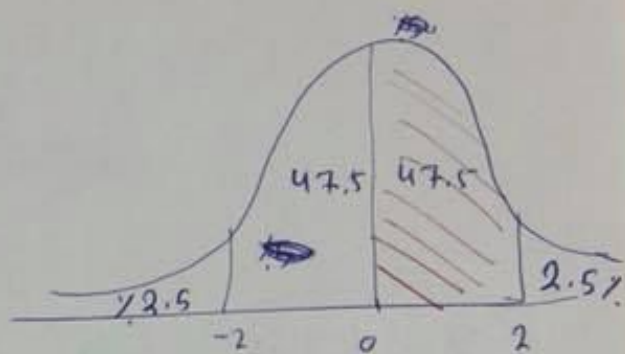
$$P(0 < Z < 2)$$

$$P(Z < 2) - P(Z < 0)$$

$$0.9772 - 0.5$$

$$= 0.4772$$

كثافة الاحتمال

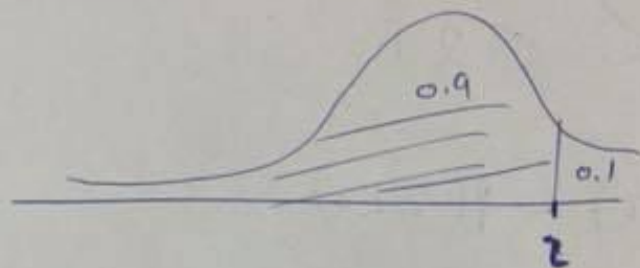


حسب الناتج الثالث

~~Handwritten scribbles and crossed-out text.~~

Find the  $x$  if  $P(X > x) = 0.1$

أولاً نجر قيمة  $z$  التي تكون عندها المساحة 0.1



$z = 1.28$   $\Rightarrow$    
 صواب  
 صواب

صواب  
0.8997  
0.1  
0.9

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$1.28 = \frac{x - 50}{10}$$

$$12.8 = x - 50$$

$x = 62.8$

$$P(X > 62.8) = 0.1$$

$$P(Z > 1.28) = 0.1$$

$P_{90} = 0.1$   
صواب  
صواب

أولاً نجر  
على الترتيب