Interval Estimation

الفكرة من هذا الشابتر هي عل دراسات وإحصائيات ك‍‍
مجموعه صغيره (Sample) وعكس هذه الإحصانيات ك‍‍
المعند ال Population

مثال على ذلك :

× إيجاد معدل دخل 150 طالب من جامعه بيزنس وعكس هـذه
النتجه ع ال 15000 طالب الموجودب من خلال عده طرقه
و قوانين

من الحالات التي سوف يتم العل عليها فيهذا الشابتر هي

① $\overline{X} \longrightarrow \mu$

② $\overline{P} \longrightarrow P$

وهذه العينة (Sample) اللي بتعكس نتائجها ع الـ Population

(Point estimation) نقطي

(Mean) $\bar{X}$ is a Point estimation for μ

$\left(\begin{array}{l}\text{Stander} \\ \text{deviation}\end{array}\right) S$ ، ، ، ، ، ، σ

(Proportion) $\bar{P}$ ، ، ، ، ، ، P

The Proportion (Percentag)

Population Proportion $\xrightarrow{\text{برمز لها}}$ P

Sample Proportion $\xrightarrow{\text{برمز لها}}$ $\bar{P}$

$$P = \frac{X}{N}$$,

X: number of elemnts of inerest

N: Population size

Ex: Students Stat 2361 is 50 students

Bus 20 , fin 15 , Acc 10 , Ecc 5

find the Proportion of Bus

$$P = \frac{X}{N} = \frac{20}{50} = 40\%$$

$\overline{P}$: Sample Proportion

$$\overline{P} = \frac{X}{\boxed{n}} \quad \text{Sample size}$$

* Sample Proportion is a Point estimate for

Proportion Population

$$\overline{P} \xrightarrow{\hspace{2cm}} P$$

Interval estimation = Rang of values

$$\boxed{\not{p}} \ to \ \boxed{\not{p}}$$

عند تكوين الـ (X̄ , S , p̂) إلى (M , σ , p) يتم تحويلها إلى فترة عندما يتم تكوين الـ (X̄ , S , p̂)

بمعنى منال ذلك

إذا كانت X̄ تساوي فرضاً 15 وبعدها يتم إيجاد M على شكل

فترة) (14 ـ 16) أو (13 ـ 18) أو ... مثال الـ

وهذا سوف يتم فتح ~~~~~ لاحقاً

_____

To Construct an interval estimation (Rang) that believe
to contain a the value of unknown Parameter.

$$\begin{array}{c} M \\ \\ p \end{array} \Bigg\} \longrightarrow$$ يتم إيجادها على شكل
(Range) فترات
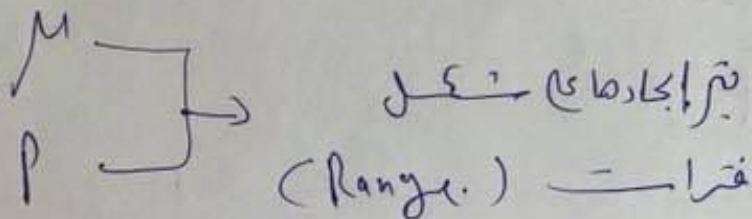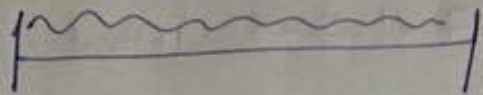
.. Interval $\overline{\hspace{2cm}}$

$$\text{Interval estimation} = \text{Point estimate} \pm \text{Margin of Error (E)}$$

E $\qquad$ E

×

Center

$=$

Point

. Margin of Error $\left(\stackrel{\circ}{E}\right)$:

نعتمد هنا على شي كي
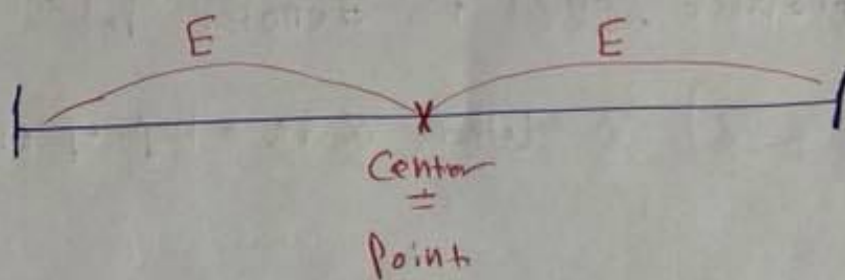
* Probability ال

* sample

---

* Each Interval should be constructed with a given (known) Probability, The given Probability is called Confidence Level

حتى يتم الحل، ايجاد ال interval يجب ان يكون هناك

احتمالية في الحل وهي تدخل في السؤال دائماً وتسمى Confidence Level

The Confidence Level is denoted by

$$(100 - \alpha) \% \quad \text{Where } \alpha \text{ is a type of error}$$

\# The Common Confidence Level :

90% $\longrightarrow$ $\alpha = 10\%$

95% $\longrightarrow$ $\alpha = 5\%$

99% $\longrightarrow$ $\alpha = 1\%$

هناك Confidence تكون معطى في السؤال وفي حال ● لم يذكرما يتم الحل على 95% دائماً

① Interval estimation for the Mean μ

حتى نتمكن من تكوين 81 معامات ـــ سيتم $\bar{X}$. اي μ يوجد هنالك.

هنالك نوعين و هما

① Population Standard deviation (σ) known Case

② " " " , unknown Case

Case 1 : (σ known Case)

The confidence Interval for μ σ known Case is given by/

Interval = Point estimate $\pm$ Marginal error

$$= \bar{X} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$\bar{X}$: Sample mean
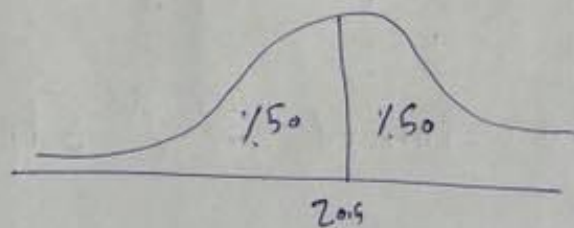n : " size
σ : Population Std

⑦

Marginal error (E)

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{6}{\sqrt{n}}$$

$\frac{6}{\sqrt{n}}$: The Standard deviation error of Mean (S.d)
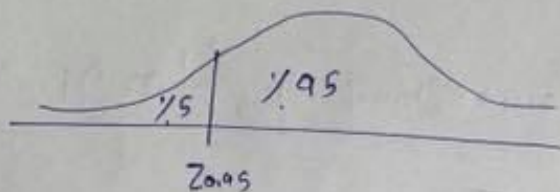
$Z_{\frac{\alpha}{2}}$ = The Value of Z (Normal Table) such that

the area to the right of Z (upper) is $\frac{\alpha}{2}$
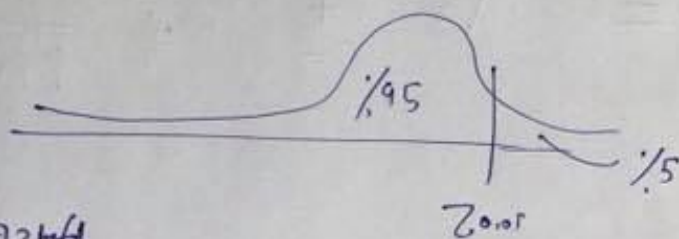
$Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.5}$

٪50   ٪50

$Z_{0.5}$

$Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.95}$

٪5   ٪95

$Z_{0.95}$

$Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.05}$

٪95

٪5

$Z_{0.05}$

نبحث في الجدول Z عن قيمة

$\boxed{\frac{\alpha}{2}}$

⑧

Ex: find the value of $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ for

90%, 95%, 99% Confidence Level

$\alpha = (100 - \text{Confiden})\%$

90% $\Longrightarrow$ $\alpha = 10\%$ $\Longrightarrow$ $\frac{\alpha}{2} = 5\%$

95% $\Longrightarrow$ $\alpha = 5\%$ $\Longrightarrow$ $\frac{\alpha}{2} = 2.5\%$

99% $\Longrightarrow$ $\alpha = 1\%$ $\Longrightarrow$ $\frac{\alpha}{2} = 0.5\%$

90% $\frac{\alpha}{2} = 5\%$
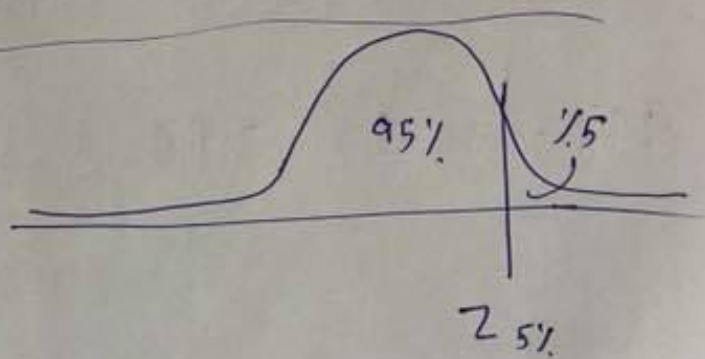
95%   5%

$Z_{5\%}$

بما حصون طابق على الجدول (Table Ch. 6) خد

من الكيون نجد ص

نختار قيمة 95%

$Z_{5\%} = \dfrac{1.64 + 1.65}{2} = \boxed{1.645}$

$95\% \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 2.5\%$

97.5%   2.5%

22.5%

$Z_{0.025} = 1.96$ (صغائية)

$99\% \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.5\%$

99.5%   0.5%

20.5%

$Z_{0.005} = 2.575$

خطأ الثقة حماية) نفضل حظوظ كبيرة لحظر اكل (
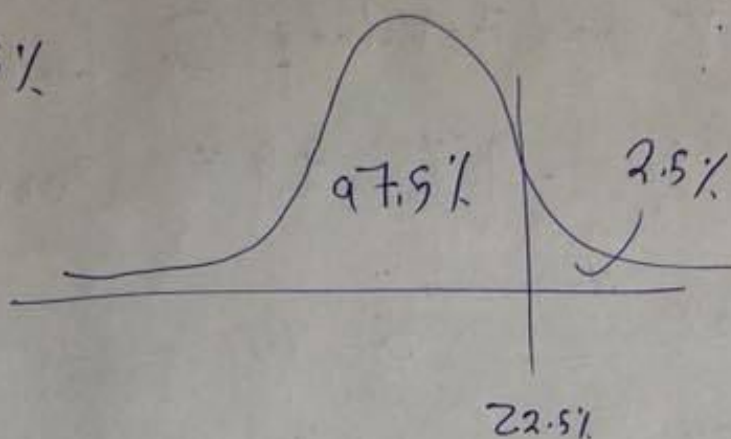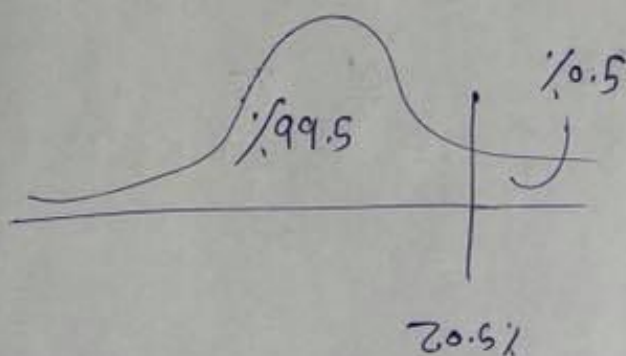
Confidence Leve	Value of $Z_{\frac{\alpha}{2}}$
90%	1.645
95%	1.96
99%	2.575

[10]

EX: A SRS of size 70 , provide a sample
mean 80 , Assume the population Standard deviation (S.d)
is 15 , find the interval estimf of the Mean
at 90% , 95% , 99% Confidence level.

known S.d   Case 1
unknow S.d   Cas 2   } أي أننا في حالة من حالات المعاملة [الـ]

وهموماً علم لدينا (Assume) مضمون أن لدينا known مضروبة في قيمة

                                        Population S.d أن

بلدينا Sample Men مضروب 80 وإلى Sample Size = 70

$$(n = 70 \ , \ \bar{X} = 80 \ , \ \sigma = 15)$$

① at 90% :- $\implies \alpha = 10\% \implies \frac{\alpha}{2} = 5\%$

Interval   = Point estim + Margid Error
estim

   = $\bar{X} \pm E$

   = 80 ± 2.96

   77.04 to 82.96

$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$Z_{0.05} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\frac{(1.645)(15)}{\sqrt{70}}$

$(= 2.96)$

①

There is 90% Probability or Confidence
that Population mean is between 77.04 to 82.96
(μ)

يوجد هنا ك إحتمال ٩٠٪ ان الـ Population ← سوف
mean

يكون بين هذه القيمتين 77.04 to 82.96

$$77.04 \leq \mu \leq 82.96$$

$$\frac{6}{\sqrt{n}} = \frac{15}{\sqrt{70}} = 1.8 \implies \text{Standar eror of the mean}$$

② at 95% $\implies \frac{\alpha}{2} = 2.5\%$

interval = $\overline{X} \pm Z_{0.025} \frac{6}{\sqrt{n}}$

$\qquad = 80 \pm 3.5$

76.5 to 83.5

$\begin{cases} E = Z_{0.025} \frac{6}{\sqrt{n}} \\ = 1.96 \frac{15}{\sqrt{70}} \\ = 3.5 \end{cases}$

التفسير: بوجدهنان احمالب از ثقة 95% ان ال M سوف

$\qquad\qquad 76.5$ to 83.5 تكون فيمنه مابين

③ at 99% $\implies \frac{\alpha}{2} = 0.5\%$

interval = $\overline{X} \pm E$

$\qquad = 80 \pm 4.6$

75.4 to 84.6

$\begin{cases} E = Z_{0.005} \frac{6}{\sqrt{n}} \\ 2.575 \frac{15}{\sqrt{70}} \\ = 4.6 \end{cases}$

$90\% \Longrightarrow \mu \Longrightarrow 77.04$ to 82.96

$95\% \Longrightarrow \mu \Longrightarrow 76.5$ to 83.5

$99\% \Longrightarrow \mu \Longrightarrow 75.4$ to 84.6

لاحظ أننا كلما زاد الـ Confidence Level زاد

طول الـ Interval الذي

As the Confidence Level increase

the Margin of error increase (E)

The interval expand

Case 2:

Interval estimation for μ <u>unknown Case</u>
(σ)

If σ is unknown then S (sample S.d) is

a Point estimate for σ

نستخدم S بدل σ نضع مكان σ

$$\text{Interval estimate} = \text{Point estimate} \pm \text{Margin of error}$$

$$\bar{X} \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

لإيجاد $t_{\frac{\alpha}{2}}$ نذهب الى الجدول الموجود (Table) Table 2, t.Distribution

ثم آخذ $\frac{\alpha}{2}$ وهي تكون على الصف الأفقي من الجدول ونأخذ أخر ال degree at freedom (df)

من الصف العمودي من الجدول حسب قانون نحسب لها $\boxed{df = n-1}$

وبعد ذلك نأخذ النقطة التي بين $t_{\frac{\alpha}{2}}$ and df

⑮

Ex: A SRS of size 50, provide a sample mean
of 80 and sample standard deviat. of 12
find the interval estimat of 90% , 99% confidance level.

بما أن القانون يحوي أنواع UN kown case أي أن لا نعطينا

Population s.d   وليس Sample s.d

من نص السؤال :

$$\boxed{n = 50} \quad \boxed{\bar{X} = 80} \quad \boxed{S = 12}$$

___

at 90%

$$\text{Interval} = \bar{X} \pm E$$

$$= 80 \pm 2.8$$

77.2 to 82.8

بوجد ثقة 1.9% أن M
سوف تكون قيمة بين
77.2 to 82.8

$$E = t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$= t_{0.05} \frac{12}{\sqrt{50}}$$

$$t_{0.05} = 1.677$$

$$1.677 \frac{12}{\sqrt{50}} \boxed{= 2.8}$$

$$E = 2.8$$

___

لإيجاد $t_{0.05}$ أرجعنا أولاً   df = n - 1
                                          50 - 1
                                        $\boxed{= 49}$

نوجد رقم 49 من الصف العامودي
و 0.05 من الصف الافقي ونأخذ
التقاطع

at 99% $\implies \frac{\alpha}{2} = 0.005$

interval $= \bar{X} \pm E$

$= 80 \pm 4.6$

75.4 to ~~80~~ 84.6

$E = t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}$

$t_{0.005} \frac{10}{\sqrt{50}}$
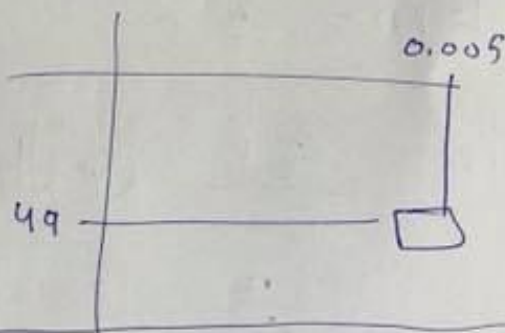
$= 2.68 \frac{12}{\sqrt{50}}$

$\boxed{= 4.6}$

$t_{0.005}$ نصف الخطأ

$df = 50-1 = 49$

49

0.005

(17)

As Confiden Level $\uparrow \Longrightarrow$ Error $\uparrow$

As Sample Size $\nearrow \Longrightarrow$ Error $\downarrow$

هناك علاقة عكسية بين حجم العينة الـ Sample size ← المطلوب ← الخطأ في
من قانون E

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{6}{\sqrt{n}}$$

$$E\sqrt{n} = Z_{\frac{\alpha}{2}} 6$$

$$\sqrt{n} = \frac{Z_{\frac{\alpha}{2}} 6}{E} \quad بتربيع الطرفين$$

$$n = \left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}} 6}{E}\right)^2$$

سبب

$Z_{\frac{\alpha}{2}}$, E

تكون معطاة بالسؤال
ولكن يجب ايجاد $\underline{6}$

⑱

يتم إيجاد 6 من خلال احدى هذه الؤقت :

1 Previous study (من القيمة الؤقت) تعطي
دراسة سابقة

2 Piloi study (دراسة استئناسية)

3 Best guess

$$6 = \frac{Rang}{4}$$

$$n = \left(\frac{Z\frac{\alpha}{2} 6}{E}\right)^2 :$$

يتم دائماً تقريب الجواب
الى اعلى (arownd up)

النقريب $\overbrace{\qquad}$ بمعاكل $\overbrace{\qquad}$

If $n = 9.1 \implies n = 10$

$n = 9.7 \implies n = 10$

$h = 9.5 \implies h = 10$

$h = 16.1 \implies h = 16$

$\vdots$ $\vdots$

Q 23/312

$n = ??$ ∴ Confidence 95% , $E = 10$, $6 = 40$
          Leve

$$n = \left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}} \, 6}{E} \right)^2$$

$$= \left(\frac{(1.96)(40)}{10} \right)^2$$

$$n = 61.4 \approx n = \underline{\underline{62}}$$

② Interval estimate for Proportion :-

$\bar{P}$: Sample Proportion $= \frac{X}{N}$

P : Population $\quad \prime\prime \quad = \frac{X}{n}$

$\bar{P}$: is a Point estimate for P

القانون العام:

يوجد أيضاً حالتان زكيب الـ M، P ,

① Case 1 : P known

② Case 2 : P unknown

---

① Cos1 : If P known then

$\text{Interval estimate} = \text{Point estimate} \pm \text{Margin ferror}$

$$= \bar{P} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$$

(21)

Case 2 : If P unknown then

interval = point estimate ± Margin of error
estimate

$$\bar{P} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n}}$$

$$\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} = \text{Standar error of the Proportion}$$

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{P^{*}(1-P^{*})}{n}} \qquad P^{*} \begin{cases} P \\ \text{or} \\ \bar{P} \end{cases} \quad معطى$$

(4) With 95% Confidence find the Interval of P.

interval = Point esm ± Margin of error

$$\overline{P} \pm E$$

$$\underset{1\,\overline{p}\,\text{si}\,\text{vo}}{\underline{0.25}} \pm \underset{\underset{3\,\overline{p}}{\text{si}\,\text{vo}}}{\underline{0.04}}$$

= 21% to 29%

There is 95% Confidence the Population Proportion will be between 21% to 29%

(24)

⑤ find interval at 99%

$$\text{interval} = \bar{P} \pm E$$

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n}}$$

$$0.25 \pm 0.05$$

$$Z_{0.005} \sqrt{\frac{0.25(1-0.25)}{400}}$$

$$20\% \text{ to } 30\%$$

$$(2.575)(0.2) \mp \boxed{0.05}$$

Confide $\uparrow \Longrightarrow E \uparrow$

$n \uparrow \Longrightarrow E \downarrow$

Sample size

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\mathring{P}(1-\mathring{P})}{n}}$$

$$E^2 = (Z_{\frac{\alpha}{2}})^2 \left(\frac{\mathring{P}(1-\mathring{P})}{n} \right)$$

$$\boxed{n = \frac{(Z_{\frac{\alpha}{2}})^2 (\mathring{P})(1-\mathring{P})}{(E)^2}}$$

$\overset{\alpha}{P} \Big\langle$ $\quad P :$ If not known case

$\bar{P}$ In unknown case

$\Big)\Big)\overset{n}{\to}$ $\Big)\Big($

㉕

$$n = \frac{(Z_{\frac{\alpha}{2}})^2 \hat{P}^*(1-\hat{P}^*)}{(E)^2}$$

$Z_{\frac{\alpha}{2}}$, E تكون معطى في السؤال

بالنسبه لـ P يتم ايجادها من احد الطرق

① Previous study (تكون معطى في السؤال)

② Pilot toge study

③ Best guess $\Rightarrow$ $\hat{P}^* = \frac{1}{2}$

في حال لم يحدد معنى P في السؤال يتم

احتساب أن تساوي $\frac{1}{2}$

مهمة جداً جداً جداً

(EX) 93/308

If the sample give by

10, 8, 12, 15, 13, 11, 6, 5

① What is the point estimat for the population Mean

Point ⟹ $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{10+8+\cdots 5}{8} = 10$

② What is the point estimat of the populat S.d

Poin ⟹ S ⟹

$S = \sqrt{\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n-1}} = 3.46$

نستخرجها على الاله الحاسبة ليس بالقانون

③ What is the standar error for the mean

$\sigma^\mu = \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{3.46}{\sqrt{8}} = 1.22$

(27)

(4) With 99%, what is the Margin of error

$E = t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}$

عندما تكون S معطية (unknow case)

$= t_{0.005} \frac{3.46}{\sqrt{8}}$

$= 3.499 \frac{3.46}{\sqrt{8}}$

$= 4.26$

Q Ex 5/300   If $n = 49$, $\sigma = 5$

σ ال معطية معناها known case   اذن

① Margin of error at 95% confidon

$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$z_{0.025} \frac{5}{\sqrt{49}} = \boxed{1.4}$

② If $\bar{x} = 24.8$ find the interval of M at 95%

$intrvl = \bar{x} \pm E$

$= 24.8 \pm 1.4$

$23.4 \text{ to } 26.2$ (28)

Q: find the Z Value for a 98.75%
Confidence interval estimation

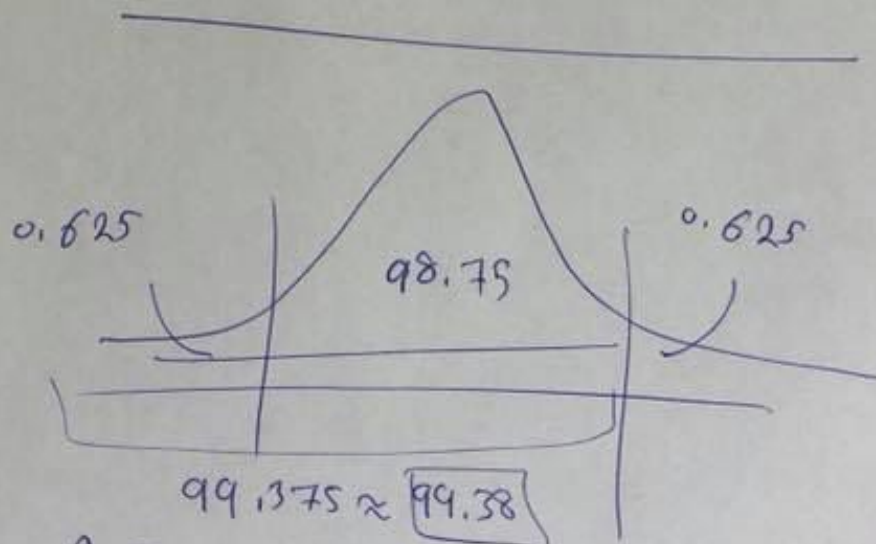المطلوب قيمة Z عند مستوى 98.75% ثقة

$(100 - \alpha)\% \neq$ Confidence interval

$(100 - \alpha)\% = 98.75\%$

$\boxed{\alpha = 1.25\%}$ $\boxed{\dfrac{\alpha}{2} = 0.625}$

0.625   98.75   0.625

$99.375 \approx \boxed{99.38}$

$Z_{0.625} = 2.5$

الجدول الكروي لإيجاد Z اذا نسبة مساحة 99.38

$\boxed{29}$