اعداد الطالب: علي وسام هليل الدلفي

الفصل الاول

المتجهات (Vectors)

1.Scalar and Vector quantities الكميات العددية والكميات المتجهة

الكمية العددية (Scalar Quantity): وهي الكميات التي تذكر بالقيمة فقط مثل:

Scalar quantities الكميات العددية	Time الزمن	Length الطول	Area المساحة	Volume الحجم	Mass الكتلة
	Speed الانطلاق		Temperature درجة الحرارة	Density الكثافة	Energy الطاقة

الكمية المتجهة (Vector Quantity): وهي الكميات التي تذكر بالقيمة والاتجاه مثل:

Vector quantities الكميات المتجهة	Displacement الازاحة	Velocity السرعة	Momentum الزخم	Acceleration التعجيل
	Electric and magnetic fields المجال الكهربائي والمغناطيسي		Torque العزم	Force القوة

ملاحظة: كلمة المجال لا تكفي لوحدها لتحديد نوعها متجهة او عددية ولكن تعتمد على نوع الدالة التي بعدها مثلا مجال مغناطيسي او كهربائي يكون متجه.

2. Vectors المتجهات

$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$ in the plane and $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ in the space

$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j}$ in the plane and $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_Z\hat{k}$ in the space

(1-2): Equality of vectors تساوي المتجهات

يكون المتجهات متساوية فقط عندما تتساوى مركباتها

if $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ and $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_Z\hat{k}$

$\vec{A} = \vec{B}$ When $A_x = B_x$, $A_y = B_y$ and $A_z = B_z$

(2-2): Zero Vector (Null Vector) متجه الصفر

يسمى المتجه الذي تكون مركباته صفر $\vec{A} = 0\,\hat{i} + 0\,\hat{j}$ بمتجه الصفر حيث ان طوله يساوي صفر

$$|\vec{A}| = \left|\sqrt{0^2 + 0^2}\right| = 0$$

وكذلك عندما نطرح متجهين متساويين فان حاصل الطرح يساوي صفر

$$\vec{A} - \vec{A} = 0$$

(3-2): The magnitude of a Vector A or $|\vec{A}|$ قيمة المتجه

If $\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$

$$A^2 = |\vec{A}|^2 = (A_x)^2 + (A_y)^2 + (A_z)^2$$

بالجذر

$$A = |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

(4-2): Unit coordinate vector وحدات المتجه الاتجاهي

هناك ثلاث وحدات متجه احداثية في نظام الاحداثيات الكارتيزية والتي قيمتها واحدة

$\hat{\imath} = \{1,0,0\}$

$\hat{\jmath} = \{0,1,0\}$

$\hat{k} = \{0,01\}$

Where $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$ is called **unit coordinate vectors**

3. Unit vectors $\vec{n}$ متجه الوحدة

يمكن تمثيل المتجه كحاصل ضرب المقدار العددي للمتجه بوحدة المتجه لتحديد الاتجاه

يمكن تعريف **وحدة المتجه ($\vec{n}$):** بانها حاصل قسمة المتجه $\vec{A}$ على قيمته $|\vec{A}|$.

$$\vec{n} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{\vec{A}}{A}$$

$|\vec{A}|$ or A is the magnitude of a Vector

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k} \qquad * \frac{A}{A}$$

$$\vec{A} = A\left\{\frac{A_x}{A}\hat{\imath} + \frac{A_y}{A}\hat{\jmath} + \frac{A_z}{A}\hat{k}\right\}$$

$$\frac{\vec{A}}{A} = \left\{\frac{A_x}{A}\hat{\imath} + \frac{A_y}{A}\hat{\jmath} + \frac{A_z}{A}\hat{k}\right\} \quad \Longrightarrow \vec{n} = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \left\{\frac{A_x}{A}\hat{\imath} + \frac{A_y}{A}\hat{\jmath} + \frac{A_z}{A}\hat{k}\right\}$$

Example If $\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ is a vector, find the unit vector of A and the direction cosions and direction angle.

$$\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$$

$$A = |\vec{A}| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{29}$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}}{\sqrt{29}} = \frac{2}{\sqrt{29}}\hat{i} - \frac{3}{\sqrt{29}}\hat{j} + \frac{4}{\sqrt{29}}\hat{k}$$

4. Adding and Subtracting Vectors جمع وطرح المتجهات

(1-4): Adding Vectors جمع المتجهات

1) Algebra method طريقة الجبر

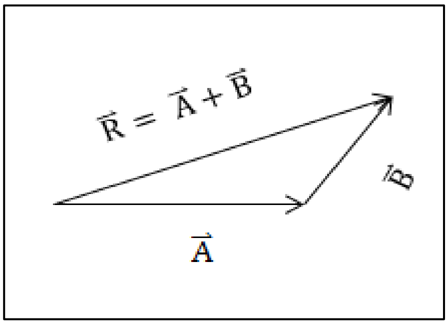
If $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ and $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_Z\hat{k}$

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_Z)\hat{k}$$

$$R_x = A_x + B_x \ , R_y = A_y + B_y \ , R_z = A_z + B_Z$$

Is celled the sum of two vectors.

2) Geometric method طريقة الهندسية



(2-4): Subtracting Vectors طرح المتجهات

If $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ and $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_Z\hat{k}$

$$\vec{R} = \vec{A} - \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y - B_y)\hat{j} + (A_z - B_Z)\hat{k}$$

خصائص جمع وطرح المتجهات

1- $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$

2- $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = (\vec{A} + \vec{C}) + \vec{B} = \vec{A} + \vec{B} + +\vec{C}$

3- $\vec{A}+\vec{B}=\vec{C}+\vec{D}+\vec{E}$

$$A_x+B_x=C_x+D_x+E_x$$

$$A_y+B_y=C_y+D_y+E_y$$

$$A_z+B_z=C_z+D_z+E_z$$

(3-4): Multiplication by Scalar ضرب المتجه بقيمة عددية

If $\vec{A}=A_x\hat{\imath}+A_y\hat{\jmath}$ $\quad c=\text{constant}$

$$c\,\vec{A}=c\left(A_x\hat{\imath}+A_y\hat{\jmath}\right)=cA_x\hat{\imath}+cA_y\hat{\jmath}$$

(4-4): Length of vector طول المتجه

$$\left|\vec{A}+\vec{B}\right|^2=(A_x+B_x)^2+(A_y+B_y)^2+(A_z+B_Z)^2$$

$$\left|\vec{A}+\vec{B}\right|=\sqrt{(A_x+B_x)^2+(A_y+B_y)^2+(A_z+B_Z)^2}$$

$$\left|\vec{A}+\vec{B}\right|^2=\left|\vec{R}\right|^2=\left(R_y\right)^2+\left(R_y\right)^2+(R_Z)^2$$

$$\left|\vec{A}+\vec{B}\right|=\left|\vec{R}\right|=\sqrt{(R_y)^2+(R_y)^2+(R_Z)^2}$$

$$\tan\theta=\frac{R_y}{R_x}=\frac{A_y+B_y}{A_x+B_x}\quad \text{When the plane}\quad \therefore\ \theta=\tan^{-1}\frac{A_y+B_y}{A_x+B_x}$$

(5-4): The vector between two points متجه بين نقطتين

The vector from $P_1(x_1,y_1\,,z_1)$ to $P_2(x_2,y_2\,,z_2)$

$$\overrightarrow{P_1\,P_2}=(x_2-x_1)\hat{\imath}+(y_2-y_1)\hat{\jmath}+(z_2-z_1)\hat{k}$$

(6-4): Distance in space المسافة في الفضاء

The distance between two points $P_1(x_1,y_1\,,z_1)$ and $P_2(x_2,y_2\,,z_2)$

$$\left|\overrightarrow{P_1\,P_2}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

(7-4): Laws قوانين

1) The commutative law قانون التبادل

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$$

2) The assistive law قانون التجميع

$$\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$$

3) The distributive law قانون التوزيع

$$c(\vec{A}+\vec{B})=c\vec{A}+c\vec{B}$$

The c is scalar

5. Multiplication Vectors ضرب المتجهات

(1-5): The Scalar Product (Dot Products) الضرب العددي او النقطي

$$\vec{A}.\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta \qquad 0\le\theta\le\pi$$

خصائص الضرب العددي

1- $\vec{A}.\vec{B}=\vec{B}.\vec{A}$ قانون التبادل

2- $\vec{A}.(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}.\vec{B}+\vec{A}.\vec{C}$ قانون التوزيع

3- $m(\vec{A}.\vec{B})=m\vec{A}.\vec{B}=\vec{A}.m\vec{B}$

4- $\vec{A}.\vec{A}=|\vec{A}|^2=A^2$

5- $\vec{A}.\vec{B}=0$ If $\vec{A}$ and $\vec{B}$ are perpendicular المتجهات متعامدة

6- $\hat{\imath}.\hat{\imath}=\hat{\jmath}.\hat{\jmath}=\hat{k}.\hat{k}=1$ since $\theta=0^\circ$

7- $\hat{\imath}.\hat{\jmath}=\hat{\jmath}.\hat{k}=\hat{\imath}.\hat{k}=0$ since $\theta=90^\circ$

8- If $\vec{A}=A_x\hat{\imath}+A_y\hat{\jmath}+A_z\hat{k}$ and $\vec{B}=B_x\hat{\imath}+B_y\hat{\jmath}+B_Z\hat{k}$

$$\therefore \boldsymbol{\vec{A}.\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_Z}$$

ملاحظة: اذا كان ناتج الضرب العددي موجب فان الزاوية تكون حادة اما اذا كانت ناتج الضرب العددي سالب فان الزاوية تكون منفرجة.

Example: If $\vec{A} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 7\hat{k}$ and $\vec{B} = 12\hat{i} + 6\hat{j} + 4\hat{k}$, find $\vec{A}.\vec{B}$

Sol:

$$\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_Z$$

$$\vec{A}.\vec{B} = (3)(12) + (-2)(6) + (7)(4)$$
$$\vec{A}.\vec{B} = 36 - 12 + 28 = 52$$

من التطبيقات الفيزيائية حول الضرب العددي هو الشغل

$$\text{Work} = \vec{F}.\vec{D} = |\vec{F}||\vec{D}| \cos\theta \qquad 0 \le \theta \le \pi$$

حيث $\vec{F}$ تمثل متجه القوة و $\vec{D}$ تمثل متجه الازاحة و θ الزاوية بين المتجهين.

Example: If $|\vec{F}| = 40\ \text{N}$, $|\vec{D}| = 3\text{m}$ and $\theta = 60^\circ$ find the work.

Sol:

$$\text{Work} = |\vec{F}||\vec{D}| \cos\theta$$
$$\text{Work} = (40)(3)\cos 60^\circ$$
$$\text{Work} = (40)(3)\frac{1}{2}$$
$$\text{Work} = 60\ \text{N.m}$$

<u>(2-5): The Vector Product (Cross product)</u> الضرب الاتجاهي

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = |\vec{\mathbf{A}}||\vec{\mathbf{B}}| \sin\boldsymbol{\theta} \qquad \mathbf{0 \le \theta \le \pi}$$

ناتج الضرب الاتجاهي لمتجهين يمثل متجه عمودي على مستوي .
يمكن ايجاد الضرب الاتجاهي من خلال الطريقة الاتي:-

If $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ and $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_Z\hat{k}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_Z \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \left(A_yB_z - A_zB_y\right)\hat{i} - (A_xB_z - A_zB_x)\hat{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k}$$

يكون حاصل الضرب الاتجاهي للوحدات كالاتي:

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} \quad , \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} \quad , \quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$$

لا يمتلك الضرب الاتجاهي خاصية التبادل وان اي تبادل بين المتجهين فانه يرافقه اضافة سالب

$$\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k} \quad , \quad \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i} \quad , \quad \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$$

خصائص الضرب الاتجاهي:

1-$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

2-$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$

3-$m(\vec{A} \times \vec{B}) = (m\vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (m\vec{B})$

4-$\vec{A} \times \vec{A} = 0$

5-$\vec{A} \times \vec{B} = 0$ only if $\vec{A}$and $\vec{B}$ are parallel

Example: If $\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2$ and $\vec{B} = -\hat{i} + 3\hat{k}$. Find the vector product $(\vec{A} \times \vec{B})$

Sol: $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix}$

$\vec{A} \times \vec{B} = (3 - 0)\hat{i} - (-6 + 2)\hat{j} + (0 - 1)\hat{k}$

$\vec{A} \times \vec{B} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$

6. The triple product of vectors الضرب الثلاثي للمتجهات

(1-6): The triple scalar product الضرب العددي الثلاثي

صيغة الضرب العددي الثلاثي $(\vec{A} \times \vec{B}).\vec{C}$

قانون الضرب العددي الثلاثي

$$\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_Z \end{vmatrix}$$

$$= A_x(B_yC_z - B_zC_y) - A_y(B_xC_z - B_zC_x) + A_z(B_xC_y - B_yC_x)$$

خصائص ضرب العددي الثلاثي

$(\vec{A} \times \vec{B}).\vec{C} = \vec{A}.(\vec{C} \times \vec{B}) = \vec{B}.(\vec{A} \times \vec{C})$

$\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}).\vec{C}$ قانون الابدال

Example: Find the volume of the parallelepiped whose edged are determined by the vectors $\vec{A} = 3\hat{j}, \vec{B} = -2\hat{i} + \hat{j}, \vec{C} = -\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$.

Sol:

$$\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0(1 - 0) - 3(-2 - 0) + 0(-2 + 1) = 0 + 6 + 0 = 6$$

Example: If $\vec{A} = 2\hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{B} = -3\hat{i} + \hat{k}$, $\vec{C} = -\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$, find $\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C})$

Sol:

$$\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 0(0-2) - 2(6+1) + 2(-6+0) = -14 - 12 = -26$$

Example: If $\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j}$, $\vec{B} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ calculate $(\vec{A} \times \vec{B}).\vec{A}$

Sol:

$$(\vec{A} \times \vec{B}).\vec{A} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2(0-2) + (0+4) + 0(-1-6) = -4 + 4 - 0 = 0$$

(2-6) The triple vector product الضرب الاتجاهي الثلاثي

مثال على صيغة الضرب الاتجاهي الثلاثي $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$

يمكن ايجاد الحل بطريقتين:-

الطريقة الاولى: وتكون بأكثر من خطوة وتكون الخطوات مشابهة للمثال التالي:

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_Z\hat{k}$$

$$\vec{C} = C_x\hat{i} + C_y\hat{j} + C_Z\hat{k}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$$

$$(\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{R} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_Z \end{vmatrix} = R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_Z\hat{k}$$

$$\vec{A} \times \vec{R} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ R_x & R_y & R_Z \end{vmatrix}$$

الطريقة الثانية: باستخدام القوانين التالية **(قوانين الضرب الاتجاهي الثلاثي):**

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (\vec{A}.\vec{C})\vec{B} - (\vec{B}.\vec{C})\vec{A}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A}.\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}.\vec{B})\vec{C}$$

Example: If $\vec{A} = -\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 2\hat{k}$, $\vec{B} = \hat{\imath} + \hat{k}$, $\vec{C} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 5\hat{k}$, find $\vec{A}.\left(\vec{B} \times \vec{C}\right)$ in two ways.

جد $\vec{A}.\left(\vec{B} \times \vec{C}\right)$ بطريقتين

Sol:

Way (1) الطريقة الاولى

$\vec{A} = -\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 2\hat{k}$

$\vec{B} = \hat{\imath} + \hat{k}$

$\vec{C} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 5\hat{k}$

$\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right)$

$$\left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \vec{R} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 2\hat{k}$$

$\vec{A} = -\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 2\hat{k}$

$\vec{R} = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 2\hat{k}$

$$\vec{A} \times \vec{R} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$$

Way (2) الطريقة الثانية

$\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \left(\vec{A}.\vec{C}\right)\vec{B} - \left(\vec{A}.\vec{B}\right)\vec{C}$

$\vec{A} = -\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 2\hat{k}$

$\vec{B} = \hat{\imath} + \hat{k}$

$\vec{C} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 5\hat{k}$

$\vec{A}.\vec{C} = (-1)(3) + (1)(-2) + (2)(5) = -3 - 2 + 10 = 5$

$\vec{A}.\vec{B} = (-1)(1) + (1)(0) + (2)(1) = -1 + 0 + 2 = 1$

$\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = (5)\left(\hat{\imath} + \hat{k}\right) - (1)\left(3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 5\hat{k}\right)$

$\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = 5\hat{\imath} + 5\hat{k} - 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 5\hat{k}$

$\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$

7. The Del operator $\vec{\nabla}$ مؤثر دل

The Del operator $\vec{\nabla}$ in Cartesian coordinates defined as:

$$\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

(1-7): The Gradient الانحدار

عندما يكون مؤثر دل على دالة غير متجه مثلاً (V) فان هذا يسمى بـ(الانحدار) ويرمز له $\vec{\nabla}V$ او gradient V او grad V ويكون الانحدار في الاحداثيات (الكارتيزية ، الاسطوانية ، الكروية) كالاتي:

$$\text{grad } V = \vec{\nabla}V = \hat{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial V}{\partial z}$$ **in rectangular coordinates**

$$\text{grad } V = \vec{\nabla}V = \hat{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} + \hat{z}\frac{\partial V}{\partial z}$$ **in cylindrical coordinates**

$$\text{grad } V = \vec{\nabla}V = \hat{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} + \hat{\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}$$ **in spherical coordinates**

ناتج الانحدار يكون متجه

(2-7): The Divergence التباعد

عندما يكون مؤثر دل على متجه مثلاً ($\vec{A}$) (بالضرب عدديا) فان هذا يسمى بـ(التباعد) ويرمز له $\vec{\nabla}.\vec{A}$ او divergence $\vec{A}$ او div $\vec{A}$ ويكون التباعد في الاحداثيات (الكارتيزية ، الاسطوانية ، الكروية) كالاتي:

1) In rectangular coordinates

If $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ the divergence in rectangular coordinates:

$$\text{div } \vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$ **in rectangular coordinates**

2) In cylindrical coordinates

If $\vec{A} = A_r\hat{r} + A_\theta\hat{\theta} + A_z\hat{z}$ the divergence in cylindrical coordinates:

$$\text{div } \vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$ **in cylindrical coordinates**

3) In spherical coordinates

If $\vec{A} = A_r\hat{r} + A_\theta\hat{\theta} + A_\varphi\hat{\varphi}$ the divergence in spherical coordinates:

$$\operatorname{div}\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\, A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

ناتج التباعد يكون عددي

(3-7): The Curl التدوير (الالتفاف)

عندما يكون مؤثر دل على متجه مثلاً $(\vec{A})$ **(بالضرب الاتجاهي)** فان هذا يسمى بـ(التباعد) ويرمز له $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ او $\operatorname{curl}\vec{A}$ ويكون التباعد في الاحداثيات (الكارتيزية ، الاسطوانية ، الكروية) كالاتي:

1) In rectangular coordinates

If $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ the curl in rectangular coordinates:

$$\operatorname{curl}\vec{A} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$ in rectangular coordinates

2) In cylindrical coordinates

If $\vec{A} = A_r\hat{r} + A_\theta\hat{\theta} + A_z\hat{z}$ the curl in cylindrical coordinates:

$$\operatorname{curl}\vec{A} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & rA_\theta & A_z \end{vmatrix}$$ in cylindrical coordinates

3) In spherical coordinates

If $\vec{A} = A_r\hat{r} + A_\theta\hat{\theta} + A_\varphi\hat{\varphi}$ the curl in spherical coordinates:

$$\operatorname{curl}\vec{A} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta\, A_\varphi \end{vmatrix}$$ in spherical coordinates

ناتج التباعد يكون متجه

(4-7): Some identities بعض المتطابقات

1) $\text{div curl}\,\vec{A} = \vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0$
2) $\text{curl grad}\,V = \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}V) = 0$
3) $\text{div grad}\,V = \vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}V\right) = \nabla^2 V$
4) $\text{curl curl}\,\vec{A} = \vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) = \text{grad div}\,\vec{A} - \nabla^2\vec{A} = \vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}.\vec{A}\right) - \nabla^2\vec{A}$
5) $\vec{\nabla}.\vec{A}\times\vec{B} = \vec{B}.\vec{\nabla}\times\vec{A} - \vec{A}.\vec{\nabla}\times\vec{B}$
6) $\vec{\nabla}(ab) = a\vec{\nabla}b + b\vec{\nabla}a$
7) $\vec{\nabla}.\left(a\vec{B}\right) = \vec{B}.\vec{\nabla}\,a + a\vec{\nabla}.\vec{B}$
8) $\vec{\nabla}.\left(a\vec{\nabla}b\right) = \vec{\nabla}a\vec{\nabla}b + a\nabla^2 b$
9) $\vec{\nabla}\times\left(a\vec{B}\right) = \vec{\nabla}a\times\vec{B} + a\vec{\nabla}\times\vec{B}$
10) $\vec{\nabla}\times\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) = \vec{A}\left(\vec{\nabla}.\vec{B}\right) - \vec{B}\left(\vec{\nabla}.\vec{A}\right) + \left(\vec{B}.\vec{\nabla}\right)\vec{A} - \left(\vec{A}.\vec{\nabla}\right)\vec{B}$
11) $\vec{\nabla}\times\left(\vec{A}.\vec{B}\right) = \left(\vec{A}.\vec{\nabla}\right)\vec{B} + \left(\vec{B}.\vec{\nabla}\right)\vec{A} + \vec{A}\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right) + \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})$

8. Laplacian operator ∇^2 مؤثر لابلاس

$$\nabla^2 = \vec{\nabla}.\vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

(1-8): $\nabla^2 V$ Where V is scalar

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ **Rectangular**

$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r^2}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ **Cylindrical**

$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial^2 V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}$ **Spherical**

When the equation $\nabla^2 V = 0$ is known as Laplace's equation.

(2-8): $\nabla^2\vec{A}$ where $\vec{A}$ is vector

$$\nabla^2\vec{A} = \hat{\imath}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial x^2} + \hat{\jmath}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial y^2} + \hat{k}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial z^2}$$

9. Vector integration تكامل المتجه

(1-9): The line integral التكامل الخطي (الطولي)

اذا كانت $\vec{A}$ متجه فان تكامل المتجه الخطي يكتب بالصيغة التالية:

$$\int_{a\ c}^{b} \vec{A}\, d\vec{l}$$

حيث c منحني على طول التكامل و (a , b) هي القيم الابتدائية والنهائية للمنحني.

اما اذا كان المنحني مغلق فان التكامل الخطي يعرف بـ

$$\oint_{c} \vec{A}\, d\vec{l}$$

(2-9): The surface integral التكامل السطحي

اذا كانت $\vec{A}$ متجه فان تكامل المتجه السطحي يكتب بالصيغة التالية:

$$\int_{S} \vec{A} \,.\, \vec{n}\, da$$

حيث s السطح واما اذا كان السطح مغلق فان التكامل السطحي يعرف بـ

$$\oint_{s} \vec{A}.\vec{n}\, da$$

(3-9): The volume integral التكامل الحجمي

اذا كانت الدالة هي $\vec{A}$ متجه فان تكامل المتجه الحجمي $\vec{K}$ يكتب بالصيغة التالية:

$$\vec{K} = \int_{v} \vec{A}\ dv$$

اما اذا كانت الدالة هي ω عددية فان تكامل الحجمي J يكتب بالصيغة التالية:

$$J = \int_{v} \omega\, dv$$

حيث v الحجم وناتج الـ $(\vec{K})$ متجه وناتج الـ(J) عددي

(4-9): Divergence theorem نظرية التباعد

بواسطة نظرية التباعد نستيطع تحويل التكامل السطحي المغلق الى تكامل حجمي

$$\oint_{s} \vec{A}\,.\,\vec{n}\,da = \int_{v} \operatorname{div}\vec{A}\,dV = \int_{v} \vec{\nabla}.\vec{A}\,dV$$

(5-9): Stokes theorem نظرية ستوكس

بواسطة نظرية ستوكس نستيطع تحويل التكامل الطولي المغلق الى تكامل سطحي

$$\oint_{c} \vec{A}\,d\vec{l} = \int_{s} \operatorname{curl}\vec{A}\,.\,\vec{n}\,da = \int_{s} (\vec{\nabla}\times\vec{A}).\,\vec{n}\,da$$

10. Differential volume , surface , and length element
تفاضل عناصر الحجم والسطح والطول

(1-10): In rectangular coordinates (x, y, z)

1) Length element

$$d\vec{l} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$$

2) Surface element

$$d\vec{s} = dxdy\,\hat{k}$$

$$d\vec{s} = dxdz\,\hat{j}$$

$$d\vec{s} = dydz\,\hat{i}$$

3) Volume element

$$dv = dxdydz$$

(2-10): In cylindrical coordinates (r, θ, z)

1) Length element

$$d\vec{l} = dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + dz\,\hat{z}$$

2) Surface element

$$d\vec{s} = rdrd\theta\,\hat{z}$$

$$d\vec{s} = r\,d\theta dz\,\hat{r}$$

$$d\vec{s} = drdz\,\hat{\theta}$$

3) Volume element

$$dv = r dr d\theta dz$$

<u>(3-10): In spherical coordinates (r, θ, φ)</u>

1) Length element

$$d\vec{l} = dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\,d\varphi\,\hat{\varphi}$$

2) Surface element

$$d\vec{s} = r dr d\theta\,\hat{\varphi}$$

$$d\vec{s} = r\sin\theta\,dr d\varphi\,\hat{\theta}$$

$$d\vec{s} = r^2\sin\theta\,d\theta d\varphi\,\hat{r}$$

3) Volume element

$$dv = r^2\sin\theta\,dr d\theta d\varphi$$

الفصل الثاني

الكهرباء الساكنة

قانون كولوم (Coulomb's law)

1- هناك نوعين فقط من الشحنات موجبة وسالبة.
2- الشحنتين النقطتين تمتد كل منهما بقوة مؤثرة على خط اتصالهم وعكسيا (inversely) مع مربع المسافة بينهم.
3- القوة تتناسب مع حاصل ضرب الشحنات وهي قوة تجاذب (attractive) اذا كانت الشحنات مختلفة وقوة تنافر (repulsive) اذا كانت الشحنات متشابهة.

قانون لشحنة منفردة

$$\vec{F} = k_e \frac{q_1\, q_2}{|\vec{r}|^2}\vec{n} = k_e \frac{q_1\, q_2}{|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = k_e \frac{q_1\, q_2}{|\vec{r}|^2}\ \hat{a}_r = k_e \frac{q_1\, q_2\, \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \ldots..(1)$$

حيث k_e هو ثابت كولوم ويساوي $k_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ} \approx 9 \times 10^9 \frac{N.m^2}{C^2}$

كثافة الشحنات هي:

1- كثافة الشحنة الحجمية (Volume charge density) $\boldsymbol{\rho = \lim \frac{\Delta q}{\Delta v} = \frac{dq}{dv} \Rightarrow q = \int_v \rho dv \ldots..(2)}$

2- كثافة الشحنة السطحية (Surface charge density) $\boldsymbol{\sigma = \lim \frac{\Delta q}{\Delta v} = \frac{dq}{ds} \Rightarrow q = \int_s \sigma ds \ldots..(3)}$

3- كثافة الشحنة الخطية (Length charge density) $\boldsymbol{\lambda = \lim \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl} \Rightarrow q = \int_l \lambda d\vec{l} \ldots..(4)}$

قانون كولوم لمجموعة N من الشحنات

$$\vec{F}_q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ} q \sum_{n=0}^{N} \frac{q_i \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \ldots..(5)$$

اما قانون كولوم **للتوزيع الشحني The charge distribution** حيث نعوض معادلة (2) و (3) في معادلة (5) نحصل على:

$$\vec{F}_q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ} q \left\{ \sum_{n=0}^{N} q_i \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \int_v \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \rho(r')dv + \int_s \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \sigma(r')da \right\} \ldots..(6)$$

Example (1): Find the force on the charge Q_1, 20µC due to charge Q_2, −300µC, Where Q_1 is at (0, 1, 2) m and Q_2 at (2, 0, 0) m

المجال الكهربائى (The Electric Field)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{q\to 0}\frac{\vec{F}_q}{q} \ldots\ldots\ldots..(7)$$

نعوض معادلة (1) في معادلة (7) نحصل على معادلة المجال لشحنة واحدة:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{q\,\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \ldots\ldots..(8)$$

اما المجال الكهربائي لمجموعة من الشحنات

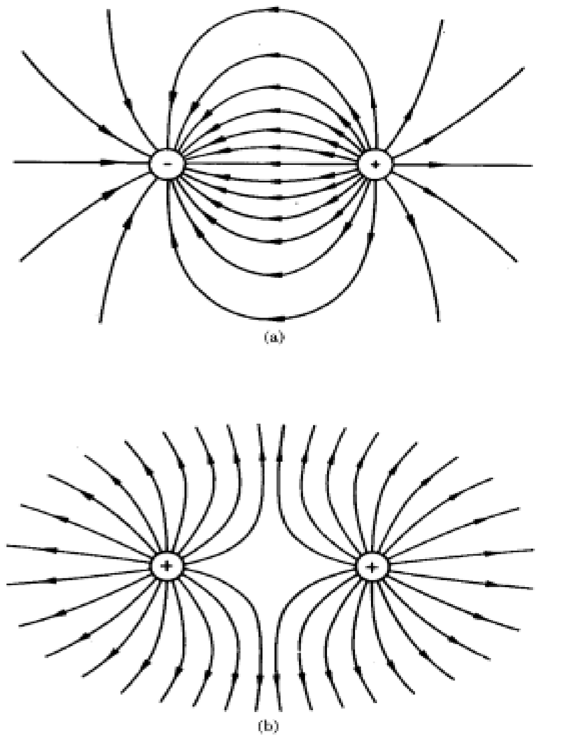
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\sum\frac{q\,\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \ldots..(9)$$

اما المجال الكهربائي لتوزيع من الشحنات نعوض معادلة (6) في معادلة (7) نحصل على:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}q\left\{\sum_{n=0}^{N} q_i\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \int_v \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}\rho(r')dv + \int_s \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}\sigma(r')da\right\}}{q}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\left\{\sum_{n=0}^{N} q_i\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \int_v \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}\rho(r')dv + \int_s \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}\sigma(r')da\right\} \ldots..(10)$$

ملاحظة: لا يهم اذا كتبنا $\vec{r}$ او $\vec{r}-\vec{r}'$ او $\vec{r}_1-\vec{r}_2$ فكلاهما يعبران عن المسافة بين الشحنتين.



الشكل 1-2 تخطيط المجال الكهربائي بواسطة خطوط القوة

الجهد الكهربائي (The Electrostatic Potential) ويرمز له بالرمز U ويكون قيمة عددية

لاحظنا بالفصل الاول اذا تلاشى التفاف كمية متجهة لايمكن التعبير عن هذه الكمية المتجهة بمثابة انحدار لكمية لامتجهة.

وهذا الكلام ينطبق على المجال الكهربائي المعطى بالمعادلة (9) فاذا كان المجال الكهربائي يعطي بالعلاقة الاتية

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

فأن الالتفاف (curl) للمجال الكهربائي يكون

$$\text{curl}\,\vec{E} = \text{curl}\frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ}\ \text{curl}\ \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ}\vec{\nabla}\times\ \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

$$\text{curl}\,\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ}\left[\vec{\nabla}\times\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\ (\vec{r}-\vec{r}')\right]\ldots\ldots..(a)$$

باستخدام المتطابقة الاتية $\vec{\nabla}\times\left(a\vec{B}\right) = \vec{\nabla}a\times\vec{B} + a\vec{\nabla}\times\vec{B}$ فأن معادلة اي تكون بالشكل الاتي:

$$\text{curl}\,\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ}\left[\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\times\ (\vec{r}-\vec{r}') + \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\vec{\nabla}\times\ (\vec{r}-\vec{r}')\right]\ldots\ldots..(b)$$

$$\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \text{grad}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = -3\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^5}\ldots\ldots..(c)$$

من الفصل الاول وجدنا انه

$$\vec{\nabla}\times\ (\vec{r}-\vec{r}') = 0\ldots\ldots..(d)$$

بتعويض معادلة (c) و (d) في معادلة نحصل على:

$$\text{curl}\,\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ}\left[-3\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^5}\times(\vec{r}-\vec{r}') + \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(0)\right]\ldots\ldots..(e)$$

$$\text{curl}\,\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ}\left[-3\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^5}\times\ (\vec{r}-\vec{r}') + 0\right]\ldots\ldots..(f)$$

بما ان الطرف الايمن يمثل ضرب اتجاهي بنفس الاحداثي وهذا يساوي صفر فان معادلة (f) تساوي صفر

$$\text{curl}\,\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ}[0+0]$$

$$\text{curl}\,\vec{E} = 0$$

وبما ان جميع حدود تساوي صفر عندئذ يتضح ان التفاف المجال الكهربائي الذي تساهم في تكوينه كل حدود المعادلة يساوي صفراً.

سؤال مهم اثبت ان تدوير المجال الكهربائي يساوي صفر

Q: (Prove that the curl of the electric field is zero)

وان معادلة (d) تشير الى وجود دالة لا متجهة ذات انحدار مساوي للمجال الكهربائي وان هذه الدالة هي **U** وتحقق معادلة $\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = -\mathbf{grad}\ \mathbf{U}(\vec{\mathbf{r}}) = -\vec{\nabla}\mathbf{U}(\vec{\mathbf{r}})$ و **U** يدعى بالجهد الكهروستاتيكي.

والان: لدينا علاقتين مهمتين تربط المجال الكهربائي والجهد الكهربائي وهما:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad}\ U(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(\vec{r}) = -\frac{dU(\vec{r})}{dr} \ldots\ldots (11)$$

$$-U(\vec{r}) = \int_{ref}^{r} \vec{E}(\vec{r})\, d\vec{r} \ldots\ldots (12)$$

$$dU(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r})\ \ d\vec{r}$$

لايجاد الجهد الكهربائي لتوزيع من الشحنات نعوض معادلة (10) في معادلة (12) ونحصل على:

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\left\{\sum_{n=0}^{N}\frac{q_i}{|\vec{r}|} + \int_v \frac{\rho(r')}{|\vec{r}|}dv + \int_s \frac{\sigma(r')}{|\vec{r}|}da\right\}$$

اما الجهد الكهربائي لشحنة منفردة تكون بالشكل الاتي:

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{q_i}{|\vec{r}|} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ r} \ldots\ldots (13)$$

يمكن حساب طاقة الجهد بالاستخدام العلاقة الاتية:

$$W(\vec{r}) = -\int \vec{F}(\vec{r}).d\vec{r}$$

في نظام (**mks**) نظام (متر ، كيلوغرام ، ثانية) وحدة الطاقة هي الجول او نيوتن – متر ووحدة الجهد الكهربائي هي الجول\كولوم ووحدة المجال الكهربائي هي نيوتن\كولوم او فولت\متر.

<u>الموصلات والعوزال</u>

شرح عليك مراجعته

<u>قانون كاوس (Gauss' law)</u>

التكامل السطحي المغلق للمركبة العمودية لشدة المجال الكهربائي يساوي الشحنة على $\varepsilon_\circ$

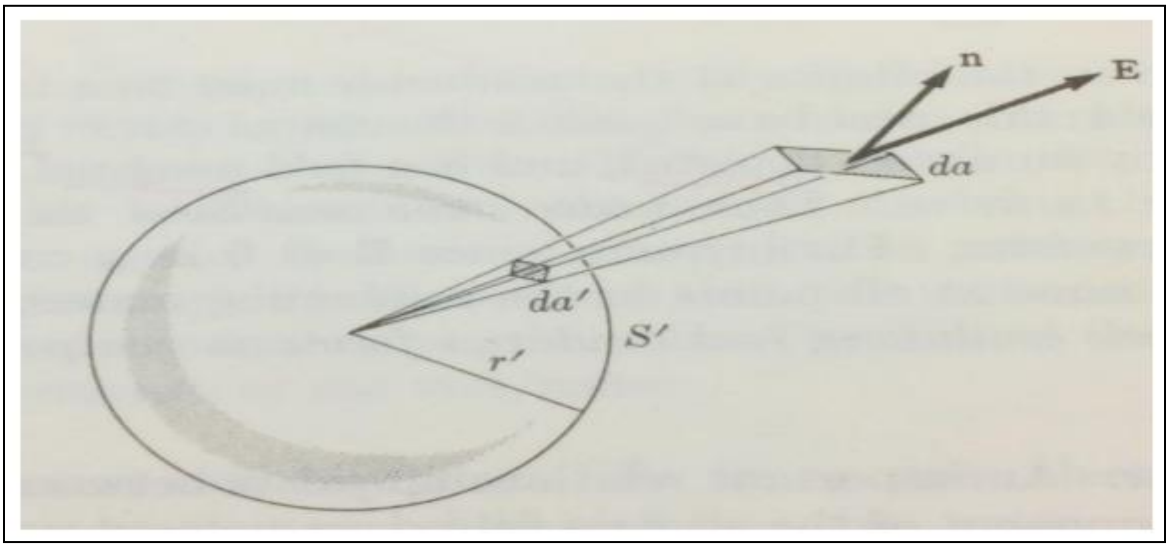
$$\oint_s \vec{E}.\vec{n}da = \frac{q}{\varepsilon_\circ} \ldots\ldots (14)$$

ويمكن اثبات ذلك بتعويض قيمة E في قانون كاوس اي معادلة (8) في معادلة (14) نحصل على:

$$\oint_s \frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}.\vec{n}da = \frac{q}{\varepsilon_\circ}$$

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ}\oint_s \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}.\vec{n}da = \frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ}\int_v \vec{\nabla}.\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}\,dv = \frac{q}{\varepsilon_\circ}$$

العامل $\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}.\vec{n}da$ هو مسقط da على مستوي عمودي على $\vec{r}$ وهي المساحة مقسمة على r^2 تمثل الزاوية المجسمة التي تحيط بـda وتكتب $d\Omega$ وهي نفسها الزاوية المحيطة بالمساحة 'da كما في الشكل التالي لكرة تتمركز حول نقطة الاصل ذات السطح 's ونصف القطر 'r



وبذلك يكون

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ}\int_v [0]\,dv = \frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{c}{r^2}$$

حيث c ثابت يمثل مساحة الدائرة

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{4\pi r^2}{r^2} = \frac{q}{\varepsilon_\circ}$$

$$\therefore \oint_s \vec{E}.\vec{n}da = \frac{q}{\varepsilon_\circ}$$

وهذا اثبات قانون كاوس او الصيغة التكاملية لقانون كاوس

قانون كاوس لمجموعة من الشحنات

$$\oint_s \vec{E}.\vec{n}da = \frac{1}{\varepsilon_\circ}\sum_{i=1}^{N} q_i$$

قانون كاوس بدلالة كثافة الشحنة الحجمية نعوض معادلة (2) في معادلة (14) نحصل على:

$$\oint_s \vec{E}.\vec{n}da = \frac{1}{\varepsilon_\circ}\int_v \rho dv$$

الصيغة التفاضلية لقانون كاوس

باستخدام نظرية التباعد (Divergence theorem)

$$\oint_s \vec{A}\,.\,\vec{n}\,da = \int_v \operatorname{div}\vec{A}\,dv = \int_v \vec{\nabla}.\vec{A}\,dv$$

فيكتب قانون كاوس بالشكل الاتي:

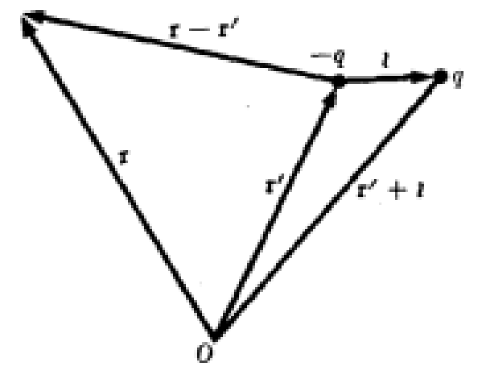
$$\oint_s \vec{E}.\vec{n}\,da = \int_v \operatorname{div}\vec{E}\,dv = \int_v \vec{\nabla}.\vec{E}\,dv = \frac{q}{\varepsilon_\circ} = \frac{1}{\varepsilon_\circ}\int_v \rho dv$$

$$\int_v \vec{\nabla}.\vec{E}\,dv = \frac{1}{\varepsilon_\circ}\int_v \rho dv$$

$$\therefore \vec{\nabla}.\vec{E} = \operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_\circ}$$

تطبيقات حول قانون كاوس (صفحة 12- 15)

الديبول الكهربائى (The electric dipole)



الشكل 9–2 المجال الكهربائي الناشيء عن شحنتين نقطيتين .

يوجد امرين مهمين نستخرجهم وهما المجال الكهربائي والجهد الكهربائي.

من الرسم ونعوض في معادلة (9) سوف تظهر لدينا معادلة المجال الكهربائي للدايبول الكهربائي

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ}\left[\frac{(\vec{r}-\vec{r}\prime-\vec{l})}{|\vec{r}-\vec{r}\prime-\vec{l}|^3} - \frac{(\vec{r}-\vec{r}\prime)}{|\vec{r}-\vec{r}\prime|^3}\right] \ldots\ldots(15)$$

نفرض ان $a = |\vec{r} - \vec{r}' - \vec{l}|^3$

في الملزمة الشرح من بعد معادلة (32) صفحة 17 الى معادلة (33) صفحة 18 هو عبارة عن ايجاد قيمة الفرضية **a** المتمثلة بمعادلة (33) في الملزمة وثم تعوض في معادلة (15) اعلاه وبعد الترتيب نصل الى معادلة (34) في الملزمة.

وان الكمية $\mathbf{q}\vec{\boldsymbol{l}}$ في معادلة (34) تمثل عزم ثنائي القطب الكهربائي $\vec{p}$ (the electric dipole moment)
فنعوض بدل كل $\mathbf{q}\vec{\boldsymbol{l}}$ بـ($\vec{p}$) فتصبح المعادلة في الشكل الاتي والتي تمثل معادلة (35) في الملزمة:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\left[\frac{3(\vec{r}-\vec{r}')\vec{p}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^5}(\vec{r}-\vec{r}') - \frac{\vec{p}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right] \ldots\ldots (16)$$

معادلة المجال الكهربائي للدايول الكهربائي

وبنفس الطريقة نجد الجهد الكهربائي للدايبول حيث قانون الجهد الكهربائي العام (معادلة 13) هو:

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{q_i}{|\vec{r}|}$$

ومن رسم الدايبول فان الجهد الكهربائي للدايبول يكون بالشكل الاتي:

$$U(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ}\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'-\vec{l}\,|} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right] \ldots\ldots (17)$$

نفرض ان $a = |\vec{r}-\vec{r}'-\vec{l}\,|$

في الملزمة الشرح من بعد معادلة (37) صفحة 18 الى معادلة (38) صفحة 19 هو عبارة عن ايجاد قيمة الفرضية $\mathbf{a}$ المتمثلة بمعادلة (38) في الملزمة وثم تعوض في معادلة (17) اعلاه وبعد الترتيب نصل الى معادلة (39) في الملزمة. وان الكمية $\mathbf{q}\vec{l}$ تمثل عزم ثنائي القطب الكهربائي $\vec{p}$ (the electric dipole moment).

لذلك فان معادلة الجهد الكهربائي للدايبول تكون بالشكل الاتي:

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

معادلة الجهد الكهربائي للدايول الكهربائي

الواجب البيتي صفحة (20): حدد المجال الكهربائي للدايبول الكهربائي من معادلة الجهد الكهربائي (جد معادلة 36 بالملزمة من معادلة 39) والجواب هو نستخدم المعادلة او العلاقة $\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = -\mathbf{grad}\ \mathbf{U}(\vec{\mathbf{r}}) = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}\mathbf{U}(\vec{\mathbf{r}})$

ونعوض فيها الجهد الكهربائي للدايبول الكهربائي ونستخرج منها المجال الكهربائي.

وما بعد التمرين نستخرج الطاقة للدايبول الكهربائي وهناك امثلة ومسائل حول الفصل.

اعداد الطالب: علي وسام هليل الدلفي

الفصل الثالث

حلول مسائل الكهروستاتيكية

حصلنا في الفصل الثاني على معادلتين مهمتين هما معادلة المجال الكهربائي ومعادلة الجهد الكهربائي وهما:

$$\mathbf{U}(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\pi\varepsilon_\circ}} \int \frac{\mathbf{dq'}}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|}$$

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\pi\varepsilon_\circ}} \int \frac{\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|^3} \mathbf{dq'}$$

معادلة بواسون (Poisson's equation)

الصيغة التفاضلية لبواسون هي:

$$\mathrm{div}\, \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_\circ}$$

بتعويض المتطابقة التالية $\vec{\mathbf{E}} = -\mathrm{grad}\, U$ (تم اخذها في الفصل الثاني) في معادلة بواسون نحصل على:

$$\mathrm{div}\, (-\mathrm{grad}\, U) = \frac{\rho}{\varepsilon_\circ}$$

$$\mathrm{div}\, \mathrm{grad}\, U = -\frac{\rho}{\varepsilon_\circ}$$

$$\mathbf{\nabla^2 U = -\frac{\rho}{\varepsilon_\circ}}$$

المعادلة التفاضلية لبواسون.

الكمية ∇^2 تمثل مؤثر لابلاس ومؤثر لابلاس يكون لكمية عددية دائماً ويمكن كتابة المؤثر لابلاس للاحداثيات (الكارتيزي والاسطوانية والكروية) بثلاثة ابعاد هي:

$$\nabla^2 U(\vec{r}) = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}$$

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \qquad \text{Rectangular}$$

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r^2}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \qquad \text{Cylindrical}$$

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \qquad \text{Spherical}$$

عندما تكون الكمية $\nabla^2 U = 0$ اي لا يوجد شحنة على السطح وعندما $\nabla^2 U = 0$ فان المعادلة تسمى بمعادلة لابلاس (Laplace's equation)، في هذه الفصل سيتم التكلم عن معادلة لابلاس وسيتم ايجاد معادلات في بعد واحد وبعدين لكل الاحداثيات (الكارتيزية والاسطوانية والكروية).

معادلة لابلاس (Laplace's equation)

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \qquad \text{Rectangular}$$

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \qquad \text{Cylindrical}$$

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0 \qquad \text{Spherical}$$

حلول معادلة لابلاس في بعد واحد

1- الاحداثيات الكارتيزية

$$\nabla^2 \mathbf{U} = \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial \mathbf{y}^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial \mathbf{z}^2} = 0$$

الاحداثي (x)	الاحداثي (y)	الاحداثي (z)
$\frac{d^2U}{dx^2} = 0$ $\frac{d}{dx}(\frac{dU}{dx}) = 0$ $\frac{dU}{dx} = a$ $dU = a\,dx$ $\int dU = \int a\,dx$ $U(x) = ax + b$	$\frac{d^2U}{dy^2} = 0$ $\frac{d}{dy}(\frac{dU}{dy}) = 0$ $\frac{dU}{dy} = a$ $dU = a\,dy$ $\int dU = \int a\,dy$ $U(y) = ay + b$	$\frac{d^2U}{dz^2} = 0$ $\frac{d}{dz}(\frac{dU}{dz}) = 0$ $\frac{dU}{dz} = a$ $dU = a\,dz$ $\int dU = \int a\,dz$ $U(z) = az + b$

2- الاحداثيات الاسطواني

$$\nabla^2 \mathbf{U} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

الاحداثي (r)	الاحداثي (θ)	الاحداثي (z)
$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) = 0$ $\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU}{dr}\right) = 0$ $r\frac{dU}{dr} = a$ $dU = \frac{1}{r}a\,dr$ $\int dU = \int \frac{1}{r}a\,dr$ $U(r) = a\ln(r) + b$	$\frac{1}{r^2}\frac{d^2U}{d\theta^2} = 0$ $\frac{d^2U}{d\theta^2} = 0$ $\frac{d}{\partial\theta}(\frac{dU}{d\theta}) = 0$ $\frac{dU}{d\theta} = a$ $dU = a\,d\theta$ $\int dU = \int a\,\partial\theta$ $U(\theta) = a\theta + b$	$\frac{d^2U}{dz^2} = 0$ $\frac{d}{dz}(\frac{dU}{dz}) = 0$ $\frac{dU}{dz} = a$ $dU = a\,dz$ $\int dU = \int a\,dz$ $U(z) = az + b$

3- الاحداثيات الكروي

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} = 0$$

الاحداثي (r)	الاحداثي (θ)	الاحداثي (φ)
$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{dU}{dr}\right)=0$ $\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{dU}{dr}\right)=0$ $r^2\frac{dU}{dr}=a$ $dU=\frac{1}{r^2}a\,dr$ $dU=a\,r^{-2}\,dr$ $\int dU=\int a\,r^{-2}\,dr$ $U(r)=-\frac{a}{r}+b$	$\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dU}{d\theta}\right)=0$ $\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dU}{d\theta}\right)=0$ $\sin\theta\frac{dU}{d\theta}=a$ $\frac{dU}{d\theta}=\frac{1}{\sin\theta}a$ $\frac{dU}{d\theta}=a\csc\theta$ $dU=a\csc\theta\ d\theta$ $\int dU=\int a\csc\theta\ \partial\theta$ $U(\theta)=a\ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)+b$	$\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{d^2U}{d\varphi^2}=0$ $\frac{d^2U}{d\varphi^2}=0$ $\frac{d}{dz}\left(\frac{dU}{d\varphi}\right)=0$ $\frac{dU}{d\varphi}=a$ $dU=a\,d\varphi$ $\int dU=\int a\,d\varphi$ $U(\varphi)=a\varphi+b$

ملخص حلول معادلات لابلاس في بعد واحد للاحداثيات (الكاتيزية ، الاسطوانية ، الكروية)

Rectangular		Cylindrical		Spherical	
المتغير	المعادلة	المتغير	المعادلة	المتغير	المعادلة
x	$U(x)=ax+b$	r	$U(r)=a\ln r+b$	r	$U(r)=-\frac{a}{r}+b$
y	$U(y)=ay+b$	θ	$U(\theta)=a\theta+b$	θ	$U(\theta)=a\ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)+b$
z	$U(z)=az+b$	z	$U(z)=az+b$	φ	$U(\varphi)=a\varphi+b$

المسائل الاربعة الخاصة بالفصل الثالث الغير موجودة بالملزمة مالت الفصل (موجودات وحدهن) يتم حلهن باستخدام المعادلات اعلاه.

حلول معادلة لابلاس في بعدين

يمكن حل المعادلات التفاضلية الجزئية بطرق مختلفة وابسط تلك الطرق هي فصل المتغيرات (The separation of variables) وفصل المتغيرات هي طريقة تحويل المعادلات التفاضلية الجزئية التي تعتمد دالتها على اكثر من متغير الى معادلات تفاضلية اعتيادية كلاً منها تعتمد على متغير واحد.

1- الاحداثيات الكارتيزية

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

سيتم الحل بأخذ الاحداثيان (x,y)

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \ldots\ldots\ldots..(1)$$

يمكن كتابة معادلة الجهد بالشكل الاتي: $U(x,y) = X(x)Y(y) \ldots\ldots\ldots..(2)$ نعوض في معادلة (1)

$$\frac{\partial^2 (XY)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (XY)}{\partial y^2} = 0 \ldots\ldots\ldots..(3)$$

$$Y\frac{d^2 (X)}{dx^2} + X\frac{d^2 (Y)}{dy^2} = 0 \ldots\ldots\ldots..(4)$$

بقسمة معادلة (4) على XY

$$\frac{1}{X}\frac{d^2 (X)}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2 (Y)}{dy^2} = 0 \ldots\ldots\ldots..(5)$$

$$\frac{1}{X}\frac{d^2 (X)}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2 (Y)}{dy^2} \ldots\ldots\ldots..(6)$$

نفرض ان كل حد من حدود معادلة (6) يساوي a^2 فمعادلة (6) تصبح بالشكل الاتي:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2 (X)}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2 (Y)}{dy^2} = a^2 \ldots\ldots\ldots..(7)$$

$$\frac{1}{X}\frac{d^2 (X)}{dx^2} = a^2 \qquad \text{and} \qquad \frac{1}{Y}\frac{d^2 (Y)}{dy^2} = -a^2$$

$$\frac{d^2 (X)}{dx^2} = a^2 X \qquad \text{and} \qquad \frac{d^2 (Y)}{dy^2} = -a^2 Y$$

$$\frac{d^2 (X)}{dx^2} - a^2 X = 0 \qquad \text{and} \qquad \frac{d^2 (Y)}{dy^2} + a^2 Y = 0$$

$$X'' - a^2 X = 0 \qquad \text{and} \qquad Y'' + a^2 Y = 0$$

$$X(x) = A_1 e^{ax} + A_2 e^{-ax} \qquad \text{and} \qquad Y(y) = B_1 e^{iay} + B_2 e^{-iay}$$

$$\mathbf{X(x) = A_3 \cosh \alpha x + A_4 \sinh \alpha x \quad and \quad Y(y) = B_3 \cos \alpha y + B_4 \sin \alpha y}$$

نعوض معادلات الحل $\mathbf{X(x)}$ و $\mathbf{Y(y)}$ في معادلة (2)

$$\mathbf{U(x, y) = (A_1 e^{\alpha x} + A_2 e^{-\alpha x})(B_1 e^{i\alpha y} + B_2 e^{-i\alpha y})}$$

او

$$\mathbf{U(x, y) = (A_3 \cosh \alpha x + A_4 \sinh \alpha x)(B_3 \cos \alpha y + B_4 \sin \alpha y)}$$

صيغ اسئلة

Q: Laplace's equation in 2D can be written $\frac{\partial^2 (XY)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (XY)}{\partial y^2} = 0$**. Find the general solution of x,y.**

2- الاحداثيات الكروي

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0$$

سيتم الحل بأخذ الاحداثيان (r,θ) (ويسمى هذه الحل بالتوافقيات الكروية (Zonal harmonics))

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial \theta}\right) = 0 \;\ldots\ldots..(1)$$

يمكن كتابة معادلة الجهد بالشكل الاتي:

$$U(x,y) = Z(r)P(\theta) \;\ldots\ldots..(2)$$

نعوض معادلة (2) في معادلة (1) نحصل على:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial Z(r)P(\theta)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Z(r)P(\theta)}{\partial \theta}\right) = 0 \;\ldots\ldots..(3)$$

$$P(\theta)\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ(r)}{dr}\right) + Z(r)\frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP(\theta)}{d\theta}\right) = 0 \;\ldots\ldots..(4)$$

بقسمة معادلة (4) على $Z(r)P(\theta)$ نحصل على:

$$\frac{1}{Z(r)}\;\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ(r)}{dr}\right) + \frac{1}{P(\theta)}\frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP(\theta)}{d\theta}\right) = 0 \;\ldots\ldots..(5)$$

بضرب معادلة (5) بـ(r^2) وترتيبها نحصل على:

$$\frac{1}{Z(r)}\;\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ(r)}{d}\right) = -\frac{1}{P(\theta)}\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP(\theta)}{d\theta}\right) \ldots\ldots..(6)$$

نفرض ان كل حد من حدود معادلة (6) يساوي k فمعادلة (6) تصبح بالشكل الاتي:

$$\frac{1}{Z(r)}\;\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ(r)}{dr}\right) = -\frac{1}{P(\theta)}\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP(\theta)}{d\theta}\right) = k \ldots..(7)$$

نحل الطرف الوسط من معادلة (7) الذي يعتمد على θ

$$-\frac{1}{P(\theta)}\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP(\theta)}{d\theta}\right) = k \;\ldots\ldots..(8)$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP(\theta)}{d\theta}\right) + k\,P(\theta) = 0 \;\ldots\ldots..(9)$$

نفرض ان $P(\theta) = P(w) \quad \text{where} \quad w = \cos\theta \;\ldots\ldots\ldots(a)$

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\frac{dw}{dw} = \frac{d}{dw}\frac{dw}{d\theta} = -\sin\theta\;\frac{d}{dw} \;\ldots\ldots\ldots(b)$$

نعوض معادلة (**b**) في معادلة (**9**) نحصل على:

$$\frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta\ \frac{d}{dw}\left(\sin\theta \times -\sin\theta\ \frac{dP(w)}{dw}\right) + k\,P(w) = 0 \ldots\ldots(c)$$

$$\frac{d}{dw}\left(\sin^2\theta\ \frac{dP(w)}{dw}\right) + kP(w) = 0 \ldots\ldots(d)$$

باستخدام المتطابقة

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - w^2$$

نعوض في معادلة (**d**) نحصل على:

$$\frac{d}{dw}(1 - w^2)\ \frac{dP(w)}{dw} + kP(w) = 0 \ldots\ldots(e)$$

معادلة (**e**) من المعادلات المعقدة وهناك حل جاهز لها ويسمى بحل ليجندر او باستخدام معادلة ليجندر (Legendre's equation)، معادلة ليجندر يقبل حلها فيزياوياً فقط عندما يكون المدى (**θ**) من صفر الى π بالشرط الي يكون فيه $\mathbf{k}$ هو عبارة عن $\mathbf{n(n+1)}$ ويجب ان يكون n عدد موجب صحيح او صفر (n =0,1,2,3,...).

$$\frac{d}{dw}(1 - w^2)\frac{dP(w)}{dw} + n(n+1)P(w) = 0 \ldots.(f)$$

ودالة ليجندر المترافقة (**Associated Legendre's functions**) هي:

$$P_n^m(w) = (1 - w^2)^{\frac{|m|}{2}}\frac{d^{|m|}}{dw^{|m|}}P_n(w) \ldots.(10)$$

حيث $n = 0,1,2,3,4, \ldots\ldots, n \geq |m|$

ومتعدد ليجندر (Legendre polynomial)

$$P_n(w) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dw^n}[(w^2 - 1)^n] = P_n(\cos\theta) \ldots.(11)$$

معادلة (10**) تمثل حل معادلة الاحداثي الزاوي.**

ملاحظة: ممكن ان يأتي سؤال يحتوي على معادلة لجندر او متعدد ليجندر ويطلب استخراج حلها لعدد من n كما في جدول صفحة 9.

والان نحل الطرف الايسر من معادلة (7) والذي يعتمد على r

$$\frac{1}{Z(r)}\ \frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ}{dr}\right) = k \ldots.(13)$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ}{dr}\right) = kZ \ldots.(14)$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ}{dr}\right)-kZ=0\ \ldots\ldots(15)$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ}{dr}\right)-n(n+1)Z=0\ \ldots\ldots(16)$$

حل الحد الايسر باستخدام مشتقة حاصل ضرب

$$r^2\frac{d^2Z}{dr^2}+2r\frac{dZ}{dr}-n(n+1)Z=0\ \ldots\ldots(17)$$

معادلة (17) معادلة تفاضلية اعتيادية متجانسة من الرتبة الثانية من الدرجة الاولى ذات معاملات مختلفة ولجعلها ذات معاملات ثابتة لايمكن استخدام طريقة الجذور لذلك نفرض ان:

$$s=\ln r\ \Rightarrow\ \frac{ds}{dr}=\frac{1}{r}$$

$$\frac{dZ}{dr}=\frac{dZ}{dr}\frac{ds}{ds}=\frac{dZ}{ds}\frac{ds}{dr}=\frac{dZ}{ds}\frac{1}{r}\qquad \therefore\ \frac{dZ}{dr}=\frac{1}{r}\frac{dZ}{ds}\ \ldots\ldots(a)$$

$$\frac{d^2Z}{dr^2}=\frac{d}{dr}\left(\frac{dZ}{dr}\right)\ \ldots\ldots(b)$$

نعوض a في b نحصل على:

$$\frac{d^2Z}{dr^2}=\frac{d}{dr}\left(\frac{dZ}{ds}\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\frac{dZ}{ds}-\frac{1}{r^2}\frac{dZ}{ds}\ \ldots\ldots(c)$$

$$\frac{d}{dr}=\frac{d}{dr}\frac{ds}{ds}=\frac{d}{ds}\frac{ds}{dr}=\frac{1}{r}\frac{d}{ds}\qquad \therefore\ \frac{d}{dr}=\frac{1}{r}\frac{d}{ds}\ \ldots\ldots(d)$$

نعوض d في c نحصل على:

$$\frac{d^2Z}{dr^2}=\frac{d}{dr}\left(\frac{dZ}{ds}\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r}\frac{1}{r}\frac{d}{ds}\frac{dZ}{ds}-\frac{1}{r^2}\frac{dZ}{ds}\ \ldots\ldots(e)$$

$$\frac{d^2Z}{dr^2}=\frac{d}{dr}\left(\frac{dZ}{ds}\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r^2}\frac{d^2Z}{ds^2}-\frac{1}{r^2}\frac{dZ}{ds}\qquad \therefore\ \frac{d^2Z}{dr^2}=\frac{1}{r^2}\left(\frac{d^2Z}{ds^2}-\frac{dZ}{ds}\right)\ \ldots\ldots(f)$$

نعوض معادلة a و f في معادلة رقم (17)

$$r^2\frac{1}{r^2}\left(\frac{d^2Z}{ds^2}-\frac{dZ}{ds}\right)+2r\frac{1}{r}\frac{dZ}{ds}-n(n+1)Z=0\ \ldots\ldots(18)$$

$$\frac{d^2Z}{ds^2}+\frac{dZ}{ds}-n(n+1)Z=0\ \ldots\ldots(19)$$

معادلة (19) معادلة تفاضلية اعتيادية متجانسة من الرتبة الثانية من الدرجة الاولى ذات معاملات ثابتة ويمكن حلها بطريقة الجذور وكما يلي:

$$\mathbf{\frac{d^2Z}{ds^2}+\frac{dZ}{ds}-n(n+1)Z=0\ \ldots..(20)}$$

$$\mathbf{\lambda^2+\lambda-n(n+1)=0\ \ldots..(21)}$$

$$\mathbf{(\lambda-n)\big(\lambda+(n+1)\big)=0\ \ldots..(22)}$$

اما $\boldsymbol{\lambda_1=n}$ او $\boldsymbol{\lambda_2=-(n+1)}$ فالحل الذي يعتمد على r

$$\mathbf{Z(s)=Ae^{ns}+Be^{-(n+1)s}\ \ldots..(23)}$$

بتعويض $s=\ln r$ في معادلة (23) نحصل على:

$$\mathbf{Z(r)=Ae^{n\ln r}+Be^{-(n+1)\ln r}\ \ldots..(24)}$$

$$\mathbf{Z(r)=Ae^{\ln r^{n}}+Be^{\ln r^{-(n+1)}}\ \ldots..(25)}$$

$$\mathbf{Z(r)=Ar^{n}+Br^{-(n+1)}\ \ldots..(26)}$$

معادلة (26) تمثل حل معادلة الاحداثي القطري.

والان نعوض معادلة (11) (الجزء السمتي) ومعادلة (26) (الجزء القطري) في معادلة (2)

$$\mathbf{U(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\big(Ar^{n}+Br^{-(n+1)}\big)\,P_n(\cos\theta)\ \ldots\ldots..(27)}$$

معادلة (27) تمثل حل معادلة لابلاس في الاحداثيات الكروية (التوافقيات الكروية)

وعند التعويض عن ....n=0,1,2,3 في معادلة (27) نحصل على:

$$\mathbf{U(r,\theta)=A_0+\frac{B_0}{r}+A_1 r\cos\theta+\frac{B_1}{r^2}\cos\theta+\frac{A_2}{2}r^2(3\cos^2\theta-1)+\frac{B_2}{2r^3}(3\cos^2\theta-1)+\cdots\ldots\ldots}$$

هناك مثال بعد الانتهاء من اشتقاق معادلة لابلاس في الاحداثيات الكروية في بعدين صفحة (11)
والمقصود بالمثال (كرة موصلة غير مشحونة قطرها a موضوعة في مجال كهربائي منتظم $\vec{E}_0=E_0\hat{k}$
جد المجال خارج الكرة) ويمكن ان يأتي بصيغ اخرى مثل:

Q: Does the total charge on conducting sphere located in uniform electric field intensity is equal to zero.

هل مجموع الشحنات على موصل كروي وضع في مجال كهربائي منتظم يساوي صفر.

Q: A conducting sphere of radius a placed in an initially z-directional uniform electric field $\mathbf{E_0}$ where the potential in the region $a\le \mathbf{r}\le\infty$ (outside thr sphere) in terms of zonal harmonics is given by: $\mathbf{V(r,\theta)=V_0-E_0 r\cos\theta+\frac{a^3E_0}{r^3}\cos\theta}$. Does the sphere is charge or not.

3- الاحداثيات الاسطواني

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

سيتم الحل بأخذ الاحداثيان (r, θ) (ويسمى هذه الحل بالتوافقيات الاسطوانية (Cylindrical harmonics))

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = 0 \ldots \ldots .. (1)$$

يمكن كتابة معادلة الجهد بالشكل الاتي:

$$U(x, y) = Y(r)S(\theta) \ldots \ldots .. (2)$$

نعوض معادلة (2) في معادلة (1) نحصل على:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial Y(r)S(\theta)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 Y(r)S(\theta)}{\partial \theta^2} = 0 \ldots \ldots .. (3)$$

$$\frac{S(\theta)}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dY(r)}{dr}\right) + \frac{Y(r)}{r^2}\frac{d^2 S(\theta)}{d\theta^2} = 0 \ldots \ldots .. (4)$$

بقسمة معادلة (4) على $Y(r)S(\theta)$

$$\frac{1}{Y(r)r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dY(r)}{dr}\right) + \frac{1}{S(\theta)r^2}\frac{d^2 S(\theta)}{d\theta^2} = 0 \ldots \ldots .. (5)$$

بضرب معادلة (5) بـ(r^2) وترتيبها

$$\frac{r}{Y(r)}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dY(r)}{dr}\right) = -\frac{1}{S(\theta)}\frac{d^2 S(\theta)}{d\theta^2} \ldots \ldots .. (6)$$

نفرض ان كل حد من حدود معادلة (6) يساوي K فمعادلة (6) تصبح بالشكل الاتي:

$$\frac{r}{Y(r)}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dY(r)}{dr}\right) = -\frac{1}{S(\theta)}\frac{d^2 S(\theta)}{d\theta^2} = K \ldots .. (7)$$

نحل الطرف الوسط من معادلة (7) الذي يعتمد على θ

$$-\frac{1}{S}\frac{d^2 S}{d\theta^2} = K \ldots \ldots .. (8)$$

$$\frac{d^2 S}{d\theta^2} + KS = 0 \ldots \ldots .. (9)$$

معادلة (9) معادلة تفاضلية اعتيادية متجانسة من الرتبة الثانية من الدرجة الاولى ذات معاملات ثابتة ويمكن حلها بطريقة الجذور وكما يلي:

$$\lambda^2 + K = 0 \ldots .. (10)$$

$$\lambda^2 = -K \ldots\ldots(11)$$

$$\lambda = \pm i\sqrt{K} \ldots\ldots(12)$$

$$S(\theta) = Ae^{\lambda_1\theta} + Be^{\lambda_2\theta} \ldots\ldots(13)$$

$$S(\theta) = Ae^{i\sqrt{K}\theta} + Be^{-i\sqrt{K}\theta} \ldots\ldots(14)$$

نستبدل كل $\sqrt{K}$ في معادلة (14) بـ n وهذا يعني $n = \sqrt{K}$ فأن معادلة (14) تصبح بالشكل:

$$S(\theta) = Ae^{i\,n\theta} + Be^{-i\,n\theta} \ldots\ldots(15)$$

باستخدام نظرية اولير نكتب معادلة (14) بالشكل الاتي:

$$S(\theta) = C\cos n\theta + D\sin n\theta \ldots\ldots(16)$$

والان نحل الطرف الايسر من معادلة (7) والذي يعتمد على r

$$\frac{r}{Y(r)}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dY(r)}{dr}\right) = K \ldots\ldots(17)$$

نستبدل كل K في معادلة (17) بـ n^2 وهذا يعني $n = \sqrt{K}$

$$\frac{r}{Y(r)}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dY(r)}{dr}\right) = n^2 \ldots\ldots(18)$$

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dY}{dr}\right) - n^2Y = 0 \ldots\ldots(19)$$

حل الحد الايسر من معادلة (19) باستخدام مشتقة حاصل ضرب

$$r\left(r\frac{d^2Y}{dr^2} + \frac{dY}{dr}\right) - n^2Y = 0 \ldots\ldots(20)$$

$$r^2\frac{d^2Y}{dr^2} + r\frac{dY}{dr} - n^2Y = 0 \ldots\ldots(21)$$

معادلة (21) معادلة تفاضلية اعتيادية متجانسة من الرتبة الثانية من الدرجة الاولى ذات معاملات مختلفة ولجعلها ذات معاملات ثابتة لايمكن استخدام طريقة الجذور لذلك نفرض:

$$t = \ln r \quad \Rightarrow \frac{dt}{dr} = \frac{1}{r}$$

$$\frac{dY}{dr} = \frac{dY}{dr}\frac{dt}{dt} = \frac{dY}{dt}\frac{dt}{dr} = \frac{dY}{dt}\frac{1}{r} \qquad \therefore \frac{dY}{dr} = \frac{1}{r}\frac{dY}{dt} \ldots\ldots(a)$$

$$\frac{d^2Y}{dr^2} = \frac{d}{dr}\left(\frac{dY}{dr}\right) \ldots\ldots(b)$$

نعوض a في b نحصل على:

$$\frac{d^2Y}{dr^2}=\frac{d}{dr}\left(\frac{dY}{dt}\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\frac{dY}{dt}-\frac{1}{r^2}\frac{dY}{dt}\ldots\ldots(c)$$

$$\frac{d}{dr}=\frac{d}{dr}\frac{dt}{dt}=\frac{d}{dt}\frac{dt}{dr}=\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\quad\therefore\frac{d}{dr}=\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\ldots\ldots(d)$$

نعوض d في c نحصل على:

$$\frac{d^2Y}{dr^2}=\frac{d}{dr}\left(\frac{dY}{ds}\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r}\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\frac{dY}{dt}-\frac{1}{r^2}\frac{dY}{dt}\ldots\ldots(e)$$

$$\frac{d^2Y}{dr^2}=\frac{d}{dr}\left(\frac{dY}{dt}\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r^2}\frac{d^2Y}{dt^2}-\frac{1}{r^2}\frac{dY}{dt}\quad\therefore\frac{d^2Y}{dr^2}=\frac{1}{r^2}\left(\frac{d^2Y}{dt^2}-\frac{dY}{dt}\right)\ldots\ldots(f)$$

نعوض معادلة a و f في معادلة رقم (21) نحصل على:

$$r^2\frac{1}{r^2}\left(\frac{d^2Y}{dt^2}-\frac{dY}{dt}\right)+r\left(\frac{1}{r}\frac{dY}{dt}\right)-n^2Y=0\ldots\ldots(22)$$

$$\frac{d^2Y}{dt^2}-\frac{dY}{dt}+\frac{dY}{dt}-n^2Y=0\ldots\ldots(23)$$

$$\frac{d^2Y}{dt^2}-n^2Y=0\ldots\ldots(24)$$

معادلة (24) معادلة تفاضلية اعتيادية متجانسة من الرتبة الثانية من الدرجة الاولى ذات معاملات ثابتة ويمكن حلها بطريقة الجذور وكما يلي:

$$\lambda^2-n^2=0\ldots\ldots(25)$$

$$\lambda^2=n^2\ldots\ldots(26)$$

$$\lambda=\pm n\ldots\ldots(27)$$

$$Y(t)=Ae^{\lambda_1 t}+Be^{\lambda_2 t}\ldots\ldots(28)$$

$$Y(t)=Ae^{nt}+Be^{-nt}\ldots\ldots(29)$$

بتعويض $t=\ln r$ في معادلة (29) نحصل على:

$$Y(r)=Ae^{n\ln r}+Be^{-n\ln r}\ldots\ldots(30)$$

$$Y(r)=Ae^{\ln r^n}+Be^{\ln r^{-n}}\ldots\ldots(31)$$

$$Y(r)=Ar^n+Br^{-n}\ldots\ldots(32)$$

معادلة (32) تمثل حل معادلة الاحداثي القطري.

والان نعوض معادلة (16) (الجزء السمتي) ومعادلة (32) (الجزء القطري) في معادلة (2)

$$U(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}(Ar^n+Br^{-n})\,(C\cos n\theta+D\sin n\theta)\ldots\ldots(33)$$

معادلة (33) تمثل الحل العام لمعادلة لابلاس في الاحداثيات الاسطوانية

وعند التعويض عن ....n=0,1,2,3 في معادلة (33) نحصل على:

$$\mathbf{U(r,\theta) = A_0 + B_0 \ln r \sum_{n=1}^{\infty}(Ar^{n} + Br^{-n})\,(C\cos n\theta + D\sin n\theta) \;\ldots\ldots(34)}$$

من صيغ اسئلة

Q: If the potential in 2D cylindrical coordinate is $\nabla^2 U = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = 0$ where $U(x,y) = Y(r)S(\theta)$. Find the general solution of $S(\theta)$

هناك امثلة حول الاحدثيات الاسطوانية (من صفحة 16 الى صفحة 20)

حلول معادلة بواسون (solutions of poisson's equation)

في الفقرات السابقة تعرفنا على معادلات لابلاس وكيفية حلها بشكل تفصيلي وان معادلة لابلاس ملائمة للمسائل الكهروستاتيكية التي تمتاز لان تكون الشحنة باجمعها مستقرة على سطوح الموصلات او متركزة على شكل شحنات نقطية او خطية.

والان نأخذ مسألة كهروستاتيكية بحيث يكون جزءاً من الشحنة معطى بدلالة $\rho(x,y,z)$ وهي دالة معروفة والجزء الباقي من الشحنة مستقر على سطوح الموصلات. ان المسألة من هذا النوع تتطلب حلاً لمعادلة بواسون.

هناك حالة واحدة يمكن فيها الحصول على حل معادلة بواسون باسلبوب مباشر مفضل على الحل المتمثلة بالمعادلة الاولى التي تمت كتابتها في بداية الفصل

$$\mathbf{U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\int \frac{dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}$$

وهذا ما يحدث بالفعل عندما كل من الدالتين U, ρ هي دالة لمتغير مستقل واحد وكمثال على هذه الحالة نأخذρ دالة للاحداثي الكروي r وندع الشحنة الكلية موزعة بشكل متناظر كروي عند ذلك تصبح المعادلة $\mathbf{\nabla^2 U = -\frac{\rho}{\varepsilon_\circ}}$ الشكل الاتي:

$$\mathbf{\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dU}{dr}\right) = -\frac{\rho(r)}{\varepsilon_\circ}}$$

يمكن اجراء التكامل على المعادلة بصورة مباشرة بفرض ان الدالة $\mathbf{\rho(r)}$ معطاة وان ثابتي التكامل يمكن تعينهما من 1- قانون كاوس للمجال الكهربائي عند نصف قطر معين. 2- من حقيقة ان $\mathbf{U}$ تقترب من الصفر عندما $\mathbf{r}$ تقترب من المالانهاية.

راجع مثال (4) في الفصل صفحة 21

الفصل الرابع

المجال الكهربائي في الاوساط العازلة

في الاوساط العازلة المثالية لا تمتلك شحنة حرة وكل الاوساط المادية هي مركبة من جزيئات والجزيئات في العوازل هي بالتأكيد تتأثر بوجود المجال الكهربائي والمجال الكهربائي بسبب القوة المبذولة من الجسيمات الموجبة التي تندفع باتجاه المجال والاجسام السالبة بعكس اتجاه المجال ، لذلك الاجزاء الموجبة والسالبة هي مزاحة من المواقع المتوازنة في عكس الاتجاه ، العوازل يمكن القول بانها مستقطبة

الاستقطاب في العوازل يعتمد على المجال الكهربائي الكلي في الوسط ولكل جزء من المجال الكهربائي ناتج بواسطة العوازل ذاتها. (اي ان المجال الكهربائي يؤثر على المواد المستقطبة).

الاستقطاب (Polarization)

نفرض عنصر حجم صغير Δv من مادة عازلة. فان عزم الدايبول الكهربائي هو

$$\Delta\vec{\mathbf{p}} = \int_{\Delta \mathbf{v}} \vec{r}\, \mathbf{dq} \ldots\ldots(\mathbf{1})$$

حيث $\Delta\vec{p}$ يعتمد على حجم عنصر الحجم

الاستقطاب $(\vec{P})$ يعرف على انه **عزم الدايبول الكهربائي لوحدة الحجم (The electric dipole moment per unit volume)** هو

$$\vec{\mathbf{P}} = \frac{\Delta\vec{\mathbf{p}}}{\Delta \mathbf{v}} \ldots\ldots(\mathbf{2})$$

$(\vec{\mathbf{P}})$ يجب ان يعرف كحد لتلك الكمية مثل Δv بسبب الصغير الشديد من نقطة عيانية للمشاهد.

اما في $\vec{P}$ بسبب نقطة الدالة $\vec{\mathbf{P}}(x, y, z)$.

$\vec{P}$ يسمى **بالاستقطاب الكهربائي (The electric Polarization)** او **الاستقطاب للوسط (The Polarization of medium)** وهي عبارة عن ابعاد وهي الشحنة لوحدة المساحة (it's dimensions are charge per unit area) ووحدتها $(\frac{C}{m^2})$.

و$\vec{\mathbf{P}}(x, y, z)$ هي كمية متجهة اي لكل عنصر حجم يمتلك اتجاه لـ$\Delta\vec{\mathbf{p}}$ وتمتلك اتجاه الازاحة للشحنة الموجبة نسبياً للشحنة السالبة كما في الشكل (1).

(Δv) يتضمن (contains) جزئيات كثيرة. بعض الاحيان يرغب التكلم حول عزم الدايبول الكهربائي من جزئيات احادية لذلك:

$$\vec{\mathbf{p}}_{\mathbf{m}} = \int_{\mathbf{molecule}} \vec{r}\, \mathbf{dq} \ldots\ldots(\mathbf{3})$$

ترابط عزم الدايبول مع Δv يعطى بالعلاقة $\Delta\vec{\mathbf{p}} = \sum \vec{\mathbf{p}}_m$ حيث المجموع يمتد الى كل الجزئيات داخل عنصر الحجم.

$$\vec{\mathbf{P}} = \frac{\mathbf{1}}{\Delta\mathbf{v}} \sum_{\mathbf{m}} \vec{\mathbf{p}}_{\mathbf{m}} \dots \dots . (\mathbf{4})$$

المجال الخارجي للوسط العازل (External Field of a Dielectric Medium)

نفرض قطعة من وسط عازل اي هو مستقطب. اي هو مميز عند كل نقطة $\vec{r}'$ بواسطة $\vec{\mathbf{P}}(\vec{r}')$. الاستقطاب يعطي رفع الى المجال الكهربائي. ومشكلتنا في حساب المجال عند نقطة $\vec{r}'$ حيث الجسم العازل خارجي.

اولاً نحسب الطاقة الكامنة (الجهد الكهربائي) $U(\vec{r})$ ونحصل على المجال الكهربائي.

كل عنصر حجم $\Delta v'$ للعازل الكهربائي هو متميز بواسطة عزم الدايبول $\Delta\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{P}}\Delta v'$ وبما ان المسافة بين (x, y, z) و $\Delta v'$ هي كبيرة مقارنة مع الابعاد لـ$\Delta v'$ وبالتالي عزم الدايبول يحدد كلياً

الطاقة الكامنة للدايبول الكهربائي (تم اشتقاقها في الفصل الثاني)

$$\Delta\mathbf{U}(\vec{r}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\pi\varepsilon_\circ}} \frac{\Delta\vec{\mathbf{p}}(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{3}} \dots \dots . (\mathbf{5})$$

من معادلة (2) نحصل على:

$$\Delta\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{P}}\, \mathbf{dv}' \dots . (\mathbf{6})$$

نعوض معادلة (6) في (5) نحصل على:

$$\Delta\mathbf{U}(\vec{r}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\pi\varepsilon_\circ}} \frac{\vec{\mathbf{P}}(\vec{\mathbf{r}}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{3}} \mathbf{dv}' \dots \dots . (\mathbf{7})$$

حيث ان $\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'$ هو متجه اتجاهي من $\Delta v'$ ذي قيمة تعطي بواسطة:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^{2} + (\mathbf{y} - \mathbf{y}')^{2} + (\mathbf{z} - \mathbf{z}')^{2}}$$

الجهد الداخل عن النقطة $\vec{r}'$ هو تم الحصول عليه بواسطة مجموع المساهمات من كل الاجزاء للعازل:

$$\mathbf{U}(\vec{r}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\pi\varepsilon_\circ}} \int_{\mathbf{v}_\circ} \frac{\vec{\mathbf{P}}(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{3}} \mathbf{dv}' \dots \dots . (\mathbf{8})$$

تابع شكل (2) وباستخدام العلاقة التالية:

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}' \left(\frac{\mathbf{1}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{3}} \dots \dots . (\mathbf{9})$$

حيث (∇') مؤثر يشمل التباعد

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}' = \frac{\partial}{\partial x'} \hat{a}_{x} + \frac{\partial}{\partial y'} \hat{a}_{y} + \frac{\partial}{\partial z'} \hat{a}_{z}$$

الكمية $\frac{\vec{\mathbf{P}}(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{3}}$ في معادلة (8) يمكن كتابتها بالشكل الاتي:

$$\frac{\vec{\mathbf{P}}(\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}'|^3}=\vec{\mathbf{P}}.\vec{\boldsymbol{\nabla}}'\left(\frac{\mathbf{1}}{|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}'|}\right)\dots\dots..(\mathbf{10})$$

باستخدام العلاقة التالية التي تم اخذها في الفصل الاول: $\vec{\boldsymbol{\nabla}}\varphi\vec{F}=\varphi\vec{\boldsymbol{\nabla}}\,\vec{F}+\vec{F}.\vec{\boldsymbol{\nabla}}\varphi$ حيث φ كمية عددية ويمكن كتابة معادلة اخرى على غرارها

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}'F\vec{A}=F\vec{\boldsymbol{\nabla}}'\,\vec{A}+\vec{A}.\vec{\boldsymbol{\nabla}}'F$$

$$\vec{A}.\vec{\boldsymbol{\nabla}}'F=\vec{\boldsymbol{\nabla}}'F\,\vec{A}-F\,\vec{\boldsymbol{\nabla}}'\,\vec{A}+\cdots\dots..(\mathbf{11})$$

حيث F دالة لنقطة عددية و $\vec{A}$ هي دالة نقطة متجه.

الطرف الايمن لمعادلة (10) يحل باستخدام معادلة (11) حيث $F=\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\prime|}\right)$ و $\vec{A}=\vec{\mathbf{P}}$

$$\frac{\vec{\mathbf{P}}(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}=\vec{\boldsymbol{\nabla}}'\left(\frac{\vec{\mathbf{P}}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)-\frac{\mathbf{1}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\vec{\boldsymbol{\nabla}}'\,\vec{\mathbf{P}}\dots\dots..(\mathbf{12})$$

بتعويض معادلة (12) في معادلة (8) نحصل على:$\vec{r}$

$$\mathbf{U}(\vec{r})=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\pi\varepsilon_\circ}}\int_{\mathbf{v}_\circ}\left[\vec{\boldsymbol{\nabla}}'\left(\frac{\vec{\mathbf{P}}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)-\frac{\vec{\boldsymbol{\nabla}}'\ \vec{\mathbf{P}}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right]\mathbf{dv}'\dots\dots..(\mathbf{13})$$

معادلة (13) تمثل معادلة الدايبول الكهربائي ونرتب المعادلة ونحصل على:

$$\mathbf{U}(\vec{r})=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\pi\varepsilon_\circ}}\int_{\mathbf{v}_\circ}\vec{\boldsymbol{\nabla}}'\left(\frac{\vec{\mathbf{P}}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)\mathbf{dv}'-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\pi\varepsilon_\circ}}\int_{\mathbf{v}_\circ}\frac{\vec{\boldsymbol{\nabla}}'\ \vec{\mathbf{P}}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathbf{dv}'\dots\dots..(\mathbf{14})$$

باستخدام نظرية التباعد $\int_{V_\circ}\vec{\boldsymbol{\nabla}}'.\vec{A}\,dv'=\oint_{S_\circ}\vec{A}\,.\vec{n}\,da'$ للحد الاول من معادلة (31)

$$\mathbf{U}(\vec{r})=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\pi\varepsilon_\circ}}\oint_{\mathbf{s}_\circ}\frac{\vec{\mathbf{P}}.\vec{n}\,\mathbf{da}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\pi\varepsilon_\circ}}\int_{\mathbf{v}_\circ}\frac{\vec{\boldsymbol{\nabla}}'\,\vec{\mathbf{P}}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathbf{dv}'\dots\dots..(\mathbf{15})$$

وباستخدام المعادلتين $\vec{\mathbf{P}}.\vec{\mathbf{n}}=\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{P}}$ و $\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{P}}=-\vec{\boldsymbol{\nabla}}'\vec{\mathbf{P}}$ فان معادلة (15) تصبح بالشكل الاتي:

$$\mathbf{U}(\vec{r})=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\pi\varepsilon_\circ}}\left[\oint_{\mathbf{s}_\circ}\frac{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{P}}\,\mathbf{da}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}+\int_{\mathbf{v}_\circ}\frac{\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{P}}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathbf{dv}'\right]=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\pi\varepsilon_\circ}}\int\frac{\mathbf{dq_P}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\dots\dots..(\mathbf{16})$$

الشحنة الكلية المستقطبة للجسم العازل هي:

$$\mathbf{Q_p}=\oint_{\mathbf{s}_\circ}\vec{\mathbf{P}}.\vec{\mathbf{n}}\,\mathbf{da}'+\int_{\mathbf{v}_\circ}(-\,\vec{\boldsymbol{\nabla}}'\,\vec{\mathbf{P}})\,\mathbf{dv}'$$

او تكتب بالشكل الاتي:

Very very important

$$\mathbf{Q_p}=\oint_{\mathbf{s}_\circ}\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{P}}\mathbf{da}'+\int_{\mathbf{v}_\circ}\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{P}}\,\mathbf{dv}'$$

والان باستخدام العلاقة ما بين المجال الكهربائي والجهد الكهربائي $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(\vec{r}) \ldots\ldots(17)$ نقوم باستخراج معادلة المجال الكهربائي من معادلة الجهد الكهربائي اي نعوض معادلة (16) في معادلة (17)

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\vec{\nabla}\left[\oint_{s_\circ}\frac{\sigma_P\, da'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \int_{v_\circ}\frac{\rho_P}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, dv'\right] \ldots\ldots(18)$$

بترتيب معادلة (18) نحصل على:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\oint_{s_\circ}\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)\sigma_P da' - \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\int_{v_\circ}\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)\rho_P\, dv' \ldots\ldots(19)$$

باستخدام العلاقة الاتية $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) = -\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)$ فان معادلة (19) تصبح بالشكل الاتي:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\oint_{s_\circ}\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)\sigma_P\, da' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\int_{v_\circ}\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)\rho_P\, dv' \ldots\ldots(20)$$

باستخدام معادلة (9) وهي $\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) = \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$ فان معادلة (20) تصبح بالشكل الاتي:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\oint_{s_\circ}\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\sigma_P\, da' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\int_{v_\circ}\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\rho_P\, dv' \ldots\ldots(21)$$

بترتيب معادلة (21) نحصل على:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\left[\oint_{s_\circ}\frac{\sigma_P(\vec{r}-\vec{r}')\, da'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} + \int_{v_\circ}\frac{\rho_P(\vec{r}-\vec{r}')dv'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right] \ldots\ldots(22)$$

معادلة (22) تمثل معادلة المجال الكهربائي للدايبول الكهربائي.

هناك مثالين حول المعادلات اعلاه صفحة (6 و7)

The derive is very simple

😂😂😂😂😂

المجال الكهربائي داخل العازل

المجال الكهربائي في العازل يجب ان يكون نفس الخصائص اي نجد المجال الكهربائي في الفراغ

$$\text{curl}\,\vec{E} = 0$$

$$\oint \vec{E}\, d\vec{l} = 0$$

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\int_{v_\circ - v_1}\frac{\rho_P(x',y',z')dv'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\int_{s_\circ - s'}\frac{\sigma_P(x',y',z')\, da'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

قانون كاوس في العوازل (Gauss's law in a dielectric: The electric displacement)

قانون كاوس العام

$$\oint_{s} \vec{\mathbf{E}}.\vec{\mathbf{n}}\mathbf{da} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\varepsilon}_{\circ}}(\mathbf{Q}+\mathbf{Q_P}) \ldots\ldots..(\mathbf{1})$$

حيث $Q = q_1 + q_2 + q_3 \ldots$ و Q_p الشحنة المستقطبة

ذكرنا سابقاً ان الشحنة المستقطبة تعطي بالعلاقة $\mathbf{Q_p} = \oint_{s_\circ} \vec{\mathbf{P}}.\vec{\mathbf{n}}\,\mathbf{da} + \int_{v_\circ}(-\vec{\nabla}\,\vec{\mathbf{P}})\,\mathbf{dv}$ وباستخدام نظرية التباعد على الحد الثاني $\oint_{s_\circ} \vec{\mathbf{A}}\,.\,\vec{\mathbf{n}}\,\mathbf{da} = \int_{v_\circ} \vec{\nabla}.\vec{\mathbf{A}}\,\mathbf{dv}$ فيصبح بالشكل الاتي:

$$\int_{v_\circ}(-\vec{\nabla}\,\vec{\mathbf{P}})\,\mathbf{dv} = -\oint_{s_\circ} \vec{\mathbf{P}}.\vec{\mathbf{n}}\,\mathbf{da}$$

ولذلك فأن الشحنة المستقطبة تصبح بالشكل الاتي:

$$\mathbf{Q_P} = \oint_{s_\circ} \vec{\mathbf{P}}.\vec{\mathbf{n}}\,\mathbf{da} - \oint_{s_\circ} \vec{\mathbf{P}}.\vec{\mathbf{n}}\,\mathbf{da}$$

ان الحدين الاول والثاني يختلفان ويمكت كتابتها بالشكل الاتي:

$$\mathbf{Q_P} = \int_{s_1+s_2+s_3} \vec{\mathbf{P}}.\vec{\mathbf{n}}\,\mathbf{da} - \int_{s+s_1+s_2+s_3} \vec{\mathbf{P}}.\vec{\mathbf{n}}\,\mathbf{da}$$

وبعد الاختصارات نحصل على:

$$\mathbf{Q_P} = -\oint_{s} \vec{\mathbf{P}}.\vec{\mathbf{n}}\,\mathbf{da} \ldots\ldots..(\mathbf{2})$$

نعوض معادلة (2) في (1) نحصل على:

$$\oint_{s} \vec{\mathbf{E}}.\vec{\mathbf{n}}\mathbf{da} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\varepsilon}_{\circ}}\left(\mathbf{Q} - \oint_{s} \vec{\mathbf{P}}.\vec{\mathbf{n}}\,\mathbf{da}\right) \ldots\ldots..(\mathbf{3})$$

$$\oint_{s} \boldsymbol{\varepsilon}_{\circ}\vec{\mathbf{E}}.\vec{\mathbf{n}}\mathbf{da} = \mathbf{Q} - \oint_{s} \vec{\mathbf{P}}.\vec{\mathbf{n}}\,\mathbf{da}$$

$$\oint_{s} \boldsymbol{\varepsilon}_{\circ}\vec{\mathbf{E}}.\vec{\mathbf{n}}\mathbf{da} + \oint_{s} \vec{\mathbf{P}}.\vec{\mathbf{n}}\,\mathbf{da} = \mathbf{Q}$$

$$\oint_{s} \left(\boldsymbol{\varepsilon}_{\circ}\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}}\right).\vec{\mathbf{n}}\mathbf{da} = \mathbf{Q}$$

$$\oint_{s} \vec{\mathbf{D}}.\vec{\mathbf{n}}\mathbf{da} = \mathbf{Q} \ldots\ldots..(\mathbf{4})$$

حيث $\vec{D} = \varepsilon_\circ \vec{E} + \vec{P}$ وهي تمثل متجه الازاحة الكهربائية.

معادلة (4) تمثل قانون كاوس في العوازل ويمكن كتابة قانون كاوس بدلالة كثافة الشحنة الحجمية

$$\oint_s \vec{D}.\vec{n}da = \int_v \rho dv \ldots\ldots..(5)$$

ويمكن ايجاد الصيغة التفاضلية لقانون كاوس في العوازل باستخدام نظرية التباعد $\oint_{s_\circ} \vec{A}\,.\,\vec{n}\,da = \int_{v_\circ} \vec{\nabla}.\vec{A}\,dv$

فان معادلة (5) تصبح بالشكل الاتي:

$$\int_{v_\circ} \vec{\nabla}.\vec{D}\,dv = \int_v \rho dv \ldots\ldots..(6)$$

$$\vec{\nabla}.\vec{D} = \rho \ldots\ldots..(7)$$

معادلة (7) تمثل الصيغة التفاضلية لقانون كاوس للعوازل

المعادلة التالية مهمة

$$\vec{E}(x,y,z) = \frac{1}{\varepsilon_\circ}\vec{D}(x,y,z) - \frac{1}{\varepsilon_\circ}\vec{P}(x,y,z)$$

ملاحظات

$\vec{D} = \varepsilon_\circ \vec{E} + \vec{P}$ معادلة الازاحة الكهربائية للحالة العامة و$\vec{D} = \varepsilon_\circ \vec{E}$ الازاحة الكهربائية بالفراغ.

$\vec{D} = \varepsilon_\circ \vec{E} + \vec{P}$ الصيغة التكاملية لقانون كاوس او متجه الازاحة الكهربائية ووحداته مثل وحدات الاستقطاب c/m^2

القابلية الكهربائية وثابت العوازل (Electric susceptibility and Dielectric constant)

الاستقطاب الكهربائي في الوسط يرتبط مع المجال الكهربائي بالصيغة التالية:

$$\vec{\mathbf{P}} = \mathbf{X(E)}\vec{\mathbf{E}}$$

حيث $\mathbf{X(E)}$ تسمى (Electric susceptibility)

عند التعويض في معادلة الازاحة الكهربائية للحالة العامة نحصل على:

$$\vec{\mathbf{D}} = \boldsymbol{\varepsilon}_\circ\vec{\mathbf{E}} + \mathbf{X(E)}\vec{\mathbf{E}}$$

بتعويض عن $\vec{\mathbf{D}}$ بما يساويها $\vec{\mathbf{D}} = \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{(E)}\vec{\mathbf{E}}$ نحصل على:

$$\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{(E)}\vec{\mathbf{E}} = \boldsymbol{\varepsilon}_\circ\vec{\mathbf{E}} + \mathbf{X(E)}\vec{\mathbf{E}}$$

بحذف $\vec{\mathbf{E}}$ من الطرفين نحصل على:

$$\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{(E)} = \boldsymbol{\varepsilon}_\circ + \mathbf{X(E)}$$

بالقسمة على $\boldsymbol{\varepsilon}_\circ$ نحصل على:

$$\mathbf{k} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\boldsymbol{\varepsilon}_\circ} = \mathbf{1} + \frac{\mathbf{X(E)}}{\boldsymbol{\varepsilon}_\circ}$$

حيث $\mathbf{k}$ هو ثابت العوازل وهو كمية غير متجهة او بلا ابعاد (dimensionless quantity) و $\boldsymbol{\varepsilon}$ و $\boldsymbol{\varepsilon}_\circ$ و $\mathrm{X(E)}$ وحداتها الفاراد لكل متر (farads/meter)

التأثيرية الكهربائية: عبارة عن مصفوفة (3×3) مع العلم ان التأثيرية اللاخطية قد اهملت باعتبار الوسط خطياً.

اعداد الطالب: علي وسام هليل الدلفي

شحنة نقطية في العوازل المائعة (point charge in a dielectric fluid)

قانون كاوس للعوازل هو

$$\oint_s \vec{\mathbf{D}}.\vec{\mathbf{n}}\mathbf{da} = \mathbf{Q} \dots\dots\dots (\mathbf{1})$$

عند تطبيق قانون كاوس على سطح كروي

$$\mathbf{4\pi r^2 D = Q}$$

نستخرج الازاحة الكهربائية

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{4\pi r^2}}$$

والان نستخرج متجه الازاحة الكهربائية بضرب الازاحة الكهربائية بـ$\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

$$\vec{\mathbf{D}} = \frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{4\pi r^2}}\frac{\vec{\mathbf{r}}}{|\vec{\mathbf{r}}|} = \frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{4\pi r^3}}\vec{\mathbf{r}} \dots\dots\dots (\mathbf{2})$$

والان نجد المجال الكهربائي باستخدام علاقة متجه الازاحة الكهربائية

$$\vec{\mathbf{D}} = \boldsymbol{\varepsilon}\vec{\mathbf{E}} \dots\dots\dots (\mathbf{3})$$

نعوض معادلة (3) في معادلة (2) نحصل على

$$\boldsymbol{\varepsilon}\vec{\mathbf{E}} = \frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{4\pi r^3}}\vec{\mathbf{r}}$$

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{4\pi\varepsilon r^3}}\vec{\mathbf{r}}$$

$$\Rightarrow \vec{\mathbf{E}} = \frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{4\pi k\varepsilon_\circ r^3}}\vec{\mathbf{r}} \dots\dots\dots (\mathbf{4}) \quad \mathbf{Where} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{k}\boldsymbol{\varepsilon}_\circ$$

معادلة الاستقطاب الكهربائي في الوسط

$$\vec{\mathbf{P}} = \mathbf{X}\,\vec{\mathbf{E}} \dots\dots\dots (\mathbf{5})$$

من معادلة (5) نجد

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\vec{\mathbf{P}}}{\mathbf{X}} \dots\dots\dots (\mathbf{6})$$

باستخدام معادلة الثابت الكهربائي نجد X

$$\mathbf{k} = 1 + \frac{X}{\boldsymbol{\varepsilon}_0} \Rightarrow X = (\mathbf{k-1})\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{0} \dots\dots\dots (\mathbf{7})$$

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\vec{\mathbf{P}}}{\mathbf{X}} = \frac{\vec{\mathbf{P}}}{(\mathbf{k}-\mathbf{1})\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{0}}} \dots\dots\dots (\mathbf{8})$$

نعوض معادلة (8) في معادلة (4) نحصل على:

$$\vec{\mathbf{P}} = \frac{(\mathbf{k}-\mathbf{1})\mathbf{Q}}{\mathbf{4\pi k r^3}}\vec{\mathbf{r}}$$

الشروط الحدودية على متجه المجال (Boundary conditions on the field vectors)

قبل ان تحاول حل مسائل اكثر تعقيداً من تلك المسائل يجب ان تعرف على التغير الذي يطرأ على منحني $\mathbf{E}$ و $\mathbf{D}$ عندما يجتازان مستوياً فاصلا بين وسطين وقد يكون الوسطان من مادتين مختلفتين في خواصهما او من مادة عازلة واخرى موصلة.

يمكن معاملة الفراغ على انه عازل ذو سماحية قدرها ε_o.

نفرض ان السطح الفاصل بين العازلين يحمل كثافة شحنة سطحية طليقة قدرها σ.

قيمة الكثافة تختلف من نقطة لاخرى على السطح.

نأخذ سطح اسطواني على شكل علبة اقراص صغيرة بحيث يقطع السطح الفاصل ويحتضن منه مساحة قيمتها ΔS.

نفرض ان ارتفاع السطح صغير الى حد يمكن اهماله اذا ما قورن مع قطر السطح الاسطواني اما قيمة الشحنة الطليقة التي يحتضنها هذا السطح تساوي (الشكل صفحة 15)

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q_S} + \mathbf{Q} = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\Delta}\mathbf{S} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{1}} + \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{2}}) \times \mathbf{volume}$$

$$\mathbf{D_{2n}} - \mathbf{D_{1n}} = \boldsymbol{\sigma} \dots\dots\dots\dots (\mathbf{1})$$

وعندما $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$

$$\mathbf{D_{2n}} = \mathbf{D_{1n}} \dots\dots\dots\dots (\mathbf{2})$$

حيث $\mathbf{D_{1n}}$ هو مركبة الازاحة العمودية للوسط الاول و$\mathbf{D_{2n}}$ هو مركبة الازاحة العمودية للوسط الثاني

ان الارتفاع في المركبة العمودية للازاحة $\mathbf{D}$ يعطي بدلالة الكثافة السطحية للشحنة الحرة على السطح الفاصل بين الوسطين.

ان المركبة العمودية للازاحة $\mathbf{D}$ تكون متصلة (مستمرة) فيما اذا لم تكن هناك شحنة حرة على السطح الفاصل بين الوسطين.

الشرط الثاني

التكامل الخطي حول اي مسار مغلق يتلاشى $\vec{\mathbf{E}}\mathrm{d}\vec{l} = 0$

طول كل من المسار $\mathrm{AB} = \mathrm{CD} = \mathrm{d}l$

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{E}\mathrm{d}l + \int_{\mathrm{C}}^{\mathrm{D}} \mathrm{E}\mathrm{d}l = 0$$

$$\vec{\mathbf{E}}_2\Delta\vec{l}+\vec{\mathbf{E}}_1\left(-\Delta\vec{l}\right)=0$$

$$\left(\vec{\mathbf{E}}_2-\vec{\mathbf{E}}_1\right).\Delta\vec{l}=0$$

$$\mathrm{E}_{2t}-\mathrm{E}_{1t}=0$$

$$\mathbf{E_{2t}=E_{1t}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (\mathbf{3})$$

حيث E_{1t} مركبة المجال الكهربائي المماسية للوسط الاول وE_{2t} مركبة المجال الكهربائي المماسية للوسط الثاني وهذا يعني ان المركبة المماسية للمجال الكهربائي تكون مستمرة عبر الوسط الفاصل بينهما.

يمكن كتابة معادلة (3) بالشكل الاتي:

$$\frac{\mathbf{D_{1t}}}{\boldsymbol{\varepsilon_1}}=\frac{\mathbf{D_{2t}}}{\boldsymbol{\varepsilon_2}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (\mathbf{4})$$

ملاحظة: اذا كان الوسط الاول موصلاً لاصبح $\mathbf{E_1=0}$ اي ان الاستقطاب يجب ان يكون صفر هو الاخر والازاحة $\mathbf{D_1}$ تتلاشى في هذا الوسط.

$$\mathbf{D_{2n}-D_{1n}=0}$$

$$\mathbf{D_{2n}=0}$$

ايجاد الزوايا من الشروط الحدودية

$$\mathbf{E_{1t}=E_{2t}}$$

$$\mathbf{E_1\sin\theta_1\ =E_2\sin\theta_2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (\mathbf{5})$$

$$\mathbf{D_{1n}=D_{2n}}$$

$$\mathbf{D_1\cos\theta_1=D_2\cos\theta_2}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{E_1\cos\theta_1}=\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{E_2\cos\theta_2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (\mathbf{6})$$

بقسمة معادلة (5) على (6)

$$\frac{\mathbf{E_1\sin\theta_1}}{\boldsymbol{\varepsilon_1}\mathbf{E_1\cos\theta_1}}=\frac{\mathbf{E_2\sin\theta_2}}{\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{\_2\ E_2\cos\theta_2}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (\mathbf{7})$$

$$\frac{\mathbf{\tan\theta_1}}{\boldsymbol{\varepsilon_1}}=\frac{\mathbf{\tan\theta_2}}{\boldsymbol{\varepsilon_2}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (\mathbf{8})$$

$$\frac{\mathbf{\tan\theta_1}}{\mathbf{k_1}\boldsymbol{\varepsilon_0}}=\frac{\mathbf{\tan\theta_2}}{\mathbf{k_2}\boldsymbol{\varepsilon_0}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (\mathbf{9})$$

$$\frac{\mathbf{\tan\theta_1}}{\mathbf{k_1}}=\frac{\mathbf{\tan\theta_2}}{\mathbf{k_2}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (\mathbf{10})$$

$$\frac{\mathbf{\tan\theta_1}}{\mathbf{\tan\theta_2}}=\frac{\mathbf{k_1}}{\mathbf{k_2}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (\mathbf{11})$$

الفصل السادس

الطاقة الكهروستاتيكية (Electrostatic Energy)

شحنات مستقرة هي شحنات ثابتة لا تتحرك (charge is stationary) وطاقتها الحركية صفر.

الطاقة الكهروستاتيكية لشحنة نقطية هي علاقة وثيقة بالجهد الكهروستاتيكي.

الطاقة الكامنة هي الشغل المنجز لنقل شحنة من مكان لأخر.

$$\vec{F}_m = -\vec{F}_e$$

$$\vec{F}_m = -q\vec{E}$$

$$\text{Work} = \text{potential energy}$$

قانون الشغل: التكامل الخطي للمركبة المماسية للقوة فالشغل لنقل الشحنة من B الى A

$$W = \int_A^B \vec{F}_m . d\vec{l} = -q\int_A^B \vec{E}.d\vec{l} = -q\int_A^B (-\text{grad } U).d\vec{l} = q\int_A^B \text{grad } U.d\vec{l} = q(U_B - U_A)..(\mathbf{1})$$

الشغل يعتمد على الجهد (الطاقة الكامنة)

الطاقة الكامنة لمجموعة من الشحنات النقطية (Potential Energy of a group of point (charges

عند وضع شحنة نقطية $\mathbf{q_1}$ في الموقع $\vec{\mathbf{r}}_1$ فان الشغل يساوي صفر لعدم وجود شحنة سابقة تؤثر عليها (اي لا يتطلب منها انجاز شغل)، وعند وضع شحنة نقطية ثانية $\mathbf{q_2}$ في الموقع $\vec{\mathbf{r}}_2$ فان الشحنة الثانية تنجز شغلاً على الشحنة الاولى ومقدار الشغل يكون بالصيغة الاتية:

$$\Delta \mathbf{W_2} = \frac{\mathbf{q_1 q_2}}{\mathbf{4\pi\varepsilon_o r_{12}}} \ldots\ldots\ldots\ldots(\mathbf{2})$$

حيث $\mathbf{r_{12}} = |\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1|$ وعند وضع شحنة نقطية ثالثة $\mathbf{q_3}$ في الموقع $\vec{\mathbf{r}}_3$ فأنها تنجز شغلا على الشحنة الاولى والثانية فالشغل المنجز على الشحنة الاولى والثانية من قبل الثالثة يكون بالصيغة الاتية:

$$\Delta \mathbf{W_3} = \mathbf{q_3}\left[\frac{\mathbf{q_1}}{\mathbf{4\pi\varepsilon_o r_{13}}} + \frac{\mathbf{q_2}}{\mathbf{4\pi\varepsilon_o r_{23}}}\right] \ldots\ldots(\mathbf{3})$$

وهكذا بالنسبة للشحنات الاضافية فكل شحنة تضاف فهي تنجز شغلا على الشحنات السابقة.

عندما تتساوى الشحنات $(q_1 = q_2 = \ldots\ldots = q_n)$ فأن الشغل يكون متناظر اي ان الشحنتين النقطتين احداهما تنجز شغلاً على الثانية فنكتب معادلة (2) و (3) كالاتي:

$$\Delta \mathbf{W_2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8\pi\varepsilon_o}}\left[\frac{\mathbf{q_1 q_2 + q_2 q_1}}{\mathbf{r_{12}}}\right] \ldots\ldots(\mathbf{4})$$

$$\Delta \mathbf{W_3} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8\pi\varepsilon_o}}\left[\frac{\mathbf{q_1 q_3 + q_3 q_1}}{\mathbf{r_{13}}} + \frac{\mathbf{q_2 q_3 + q_3 q_2}}{\mathbf{r_{23}}}\right] \ldots\ldots(\mathbf{5})$$

واخيرا نستنتج ان الشغل لمجموعة من الشحنات n يكون بالصيغة الاتية:

$$\Delta \mathbf{W_n} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8\pi\varepsilon_o}}\left[\frac{\mathbf{q_1 q_n + q_n q_1}}{\mathbf{r_{1n}}} + \frac{\mathbf{q_2 q_n + q_n q_2}}{\mathbf{r_{2n}}} + \cdots\ldots\ldots + \frac{\mathbf{q_{n-1} q_n + q_n q_{n-1}}}{\mathbf{r_{n-1,n}}}\right] \ldots\ldots(\mathbf{7})$$

$$\mathbf{W = \Delta W_2 + \Delta W_3 + \Delta W_4 + \cdots + \Delta W_n \ldots\ldots..(8)}$$

$$\mathbf{W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_o}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\frac{q_j q_k}{r_{jk}} \ldots\ldots..\ldots..(9)}$$

معادلة (9) تصبح الطاقة الكهروستاتيكية الكلية لتجمع المنظومة المكونة من n من الشحنات مساوية لمجموعة $\mathbf{\Delta W}$.

ان القيمة النهائية للجهد U عند الشحنة النقطية j تساوي:

$$\mathbf{U_j = \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_k}{r_{kj}} \ldots\ldots..\ldots..(10)}$$

وبهذا تصبح الطاقة الكهروستاتيكية للمنظومة

$$\mathbf{W = \frac{1}{2}\sum_{j}^{n} q_j\, U_j \ldots\ldots..\ldots..(11)}$$

الطاقة الكهروستاتيكية لتوزيع من الشحنات

تم اشتقاق المعادلة الاتية في الفصل الرابع

$$\mathbf{q = \int_v \rho\, dv + \oint_s \sigma\, da \ldots\ldots..\ldots..(12)}$$

وباستخدام معادلة (11) والتي سوف نعوض بها معادلة (12) ونحصل على:

$$\mathbf{W = \frac{1}{2}\left[\int_v \rho\, dv + \oint_s \sigma\, da'\right] U \ldots\ldots..\ldots..(13)}$$

$$\mathbf{W = \frac{1}{2}\int_v \rho\, U\, dv + \frac{1}{2}\oint_s \sigma\, U\, da \ldots\ldots..\ldots..(14)}$$

وطالما ان السطح الموصل هو منطقة تساوي جهد فعلية وللموصلات يكون

$$\mathbf{\frac{1}{2}\int_{conductor} \sigma\, U\, da = \frac{1}{2} Q_j U_j \ldots\ldots..\ldots..(15)}$$

حيث $\mathbf{Q_j}$ هي الشحنة التي يحملها الموصل j فتكون معادلة 14 بالشكل الاتي: (او يمكن القول نضيف الحد الايمن لمعادلة (15) لمعادلة (14) نحصل على:)

$$\mathbf{W = \frac{1}{2}\int_v \rho\, U\, dv + \frac{1}{2}\oint_s \sigma\, U\, da + \frac{1}{2} Q_j U_j \ldots\ldots..\ldots..(16)}$$

ان الحدان الاول والثاني اجسام غير موصلة والحد الثالث يكون موصل فأن معادلة (16) تكون بالشكل الاتي:

$$\mathbf{W = \frac{1}{2}\sum\nolimits_j Q_j U_j \ldots\ldots..\ldots..(17)}$$

كثافة الطاقة لمجال كهروستاتيكي

باستخدام معادلة (14) والتي سوف ترقم بالرقم (1)

$$\mathbf{W}=\frac{1}{2}\int_{v}\boldsymbol{\rho}\,\mathbf{U}\,\mathbf{dv}+\frac{1}{2}\oint_{s}\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{U}\,\mathbf{da}\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

وباستخدام قوانين كاوس التفاضلية (من الفصل الرابع) $\boldsymbol{\rho}=\vec{\nabla}.\vec{D}$ و $\boldsymbol{\sigma}=\vec{D}.\vec{n}$ فعند تعويضهما في معادلة رقم (1) نحصل على المعادلة الاتية:

$$\mathbf{W}=\frac{1}{2}\int_{v}\vec{\nabla}.\vec{D}\,\mathbf{U}\,\mathbf{dv}+\frac{1}{2}\oint_{s}\vec{D}.\vec{n}\,\mathbf{U}\,\mathbf{da}\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\mathbf{W}=\frac{1}{2}\int_{v}\mathbf{U}\vec{\nabla}.\vec{D}\,\mathbf{dv}+\frac{1}{2}\oint_{s}\mathbf{U}\,\vec{D}.\vec{n}\,\mathbf{da}\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

باستخدام العلاقة التالية التي تم اخذها في الفصل الاول: $\vec{\nabla}\varphi\vec{F}=\varphi\vec{\nabla}\vec{F}+\vec{F}.\vec{\nabla}\varphi$ حيث φ كمية عددية ويمكن كتابة معادلة اخرى على غرارها (الحد الاول من الطرف الايمن لمعادلة (3))

$$\vec{\nabla}.\mathbf{U}\vec{D}=\mathbf{U}\vec{\nabla}.\vec{D}+\vec{D}.\vec{\nabla}\mathbf{U}$$

$$\mathbf{U}\vec{\nabla}.\vec{D}=\vec{\nabla}.\mathbf{U}\vec{D}-\vec{D}.\vec{\nabla}\mathbf{U}\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

نعوض معادلة (4) في معادلة (3) نحصل على:

$$\mathbf{W}=\frac{1}{2}\int_{v}\left(\vec{\nabla}.\mathbf{U}\vec{D}-\vec{D}.\vec{\nabla}\mathbf{U}\right)\mathbf{dv}+\frac{1}{2}\oint_{s}\mathbf{U}\,\vec{D}.\vec{n}\,\mathbf{da}\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

$$\mathbf{W}=\frac{1}{2}\int_{v}\vec{\nabla}.\mathbf{U}\vec{D}\,\mathbf{dv}-\frac{1}{2}\int_{v}\vec{D}.\vec{\nabla}\mathbf{U}\,\mathbf{dv}+\frac{1}{2}\oint_{s}\mathbf{U}\,\vec{D}.\vec{n}\,\mathbf{da}\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

باستخدام نظرية التباعد $\int_{V}\vec{\nabla}.\vec{A}\,dV=\oint_{S}\vec{A}\,.\,\vec{n}\,da$ على الحد الاول وباستخدام العلاقة بين المجال الكهربائي والجهد الكهربائي $\vec{E}(\vec{r})=-\vec{\nabla}U(\vec{r})$ على الحد الوسط نحصل على:

$$\mathbf{W}=\frac{1}{2}\int_{s+s'}\mathbf{U}\vec{D}\,.\vec{n}'\,\mathbf{da}+\frac{1}{2}\int_{v}\vec{D}.\vec{E}\,\mathbf{dv}+\frac{1}{2}\oint_{s}\mathbf{U}\,\vec{D}.\vec{n}\,\mathbf{da}\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

حيث $\mathbf{s}+\mathbf{s}'$: السطح الكلي الذي يحيط بالحجم v

$\mathbf{s}$: مساحة السطوح جميع الموصلات في النظام

$\mathbf{s}'$: السطح الذي يحيط بالمنظومة من الخارج ويمكن اختيار موضعه في المالانهاية.

$\vec{n}'$: متجه عمودي يتجه خارج الموصل وداخل الجسم.

ولهذا السبب فان التكامل السطحي الاول على السطح s يمحو التكامل السطحي الاخير (اي الحد الاخير) والان نثبت ان التكامل السطحي على السطح $\mathbf{s}'$ يساوي صفر. (الفقرة الثانية بعد المعادلة 20 في صفحة 5 من الملزمة هو اثبات ان التكامل السطحي على السطح $\mathbf{s}'$ يساوي صفر) وبعد الاثبات نحصل على ما تبقى من معادلة (7)

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}\int_{v}\vec{\mathbf{D}}.\vec{\mathbf{E}}\,\mathbf{dv}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\mathbf{D}}.\vec{\mathbf{E}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

باستخدام المعادلة $\vec{\mathbf{D}} = \boldsymbol{\varepsilon}\vec{\mathbf{E}}$ ونعوضها في معادلة (9) نحصل على:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{E}^{2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

حيث $\boldsymbol{\omega}$ كثافة الشحنة الخطية

....

في كتاب اخر للنظرية الكهرومغناطيسية توجد خطوات اخرى للانتقال من معادلة (7) الى معادلة (8) حيث نكتب معادلة (7) بالشكل الاتي:

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}\int_{s}\mathbf{U}\vec{\mathbf{D}}\,.\,\vec{\mathbf{n}}'\,\mathbf{da} - \frac{1}{2}\int_{s'}\mathbf{U}\vec{\mathbf{D}}\,.\,\vec{\mathbf{n}}'\,\mathbf{da} + \frac{1}{2}\int_{v}\vec{\mathbf{D}}.\vec{\mathbf{E}}\,\mathbf{dv} + \frac{1}{2}\oint_{s}\mathbf{U}\,\vec{\mathbf{D}}.\vec{\mathbf{n}}\ \ \mathbf{da}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(7a)$$

وباستخدام العلاقة $\vec{\mathbf{n}}' = -\vec{\mathbf{n}}$ فأن معادلة (7a) تصبح بالشكل الاتي:

$$\mathbf{W} = -\frac{1}{2}\int_{s}\mathbf{U}\vec{\mathbf{D}}\,.\,\vec{\mathbf{n}}\,\mathbf{da} + \frac{1}{2}\int_{s'}\mathbf{U}\vec{\mathbf{D}}\,.\,\vec{\mathbf{n}}\,\mathbf{da} + \frac{1}{2}\int_{v}\vec{\mathbf{D}}.\vec{\mathbf{E}}\,\mathbf{dv} + \frac{1}{2}\oint_{s}\mathbf{U}\,\vec{\mathbf{D}}.\vec{\mathbf{n}}\ \ \mathbf{da}\ \ldots\ldots\ldots(7b)$$

بما ان الحدين الاول والاخير من معادلة (7b) متشابها بالصيغة مختلفان بالاشارة فيحذفان تصبح المعادلة بالشكل الاتي:

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}\int_{s'}\mathbf{U}\vec{\mathbf{D}}\,.\,\vec{\mathbf{n}}\,\mathbf{da} + \frac{1}{2}\int_{v}\vec{\mathbf{D}}.\vec{\mathbf{E}}\,\mathbf{dv}\ \ldots\ldots\ldots(7c)$$

ولتوزيع شحنة عشوائي مقيد بسبب شحنة صافية عند مسافات بعيدة فالجهد يتناسب عكسياً مع المسافة فاذا تم اختيار السطح $\mathbf{s}'$ ما لا نهاية فان الحد الاول من معادلة (7c) سيكون صفر فمعادلة (7c) تكتب بالشكل الاتي:

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}\int_{v}\vec{\mathbf{D}}.\vec{\mathbf{E}}\,\mathbf{dv}\ \ldots\ldots\ldots(8)$$

كثافة الطاقة الكهربائية هي الطاقة الكهربائية بالنسبة للحجم فمعادلة (8) تصبح بالشكل الاتي:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\mathbf{D}}.\vec{\mathbf{E}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

باستخدام المعادلة $\vec{\mathbf{D}} = \boldsymbol{\varepsilon}\vec{\mathbf{E}}$ ونعوضها في معادلة (9) نحصل على:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{E}^{2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

حيث $\boldsymbol{\omega}$ كثافة الشحنة الخطية

Example1: If the electric field in a vacuum is defined by $\vec{E} = 2r\sin\theta\,\hat{a}_r - r\cos\theta\,\hat{a}_\theta$. Find the energy in the region $0 \le r \le 5$ and $0 \le \theta \le \pi/3$.

Solution:

$$W = \frac{1}{2}\int_v \vec{D}.\vec{E}\,dv = \frac{1}{2}\varepsilon\int_v E^2\,dv = \frac{1}{2}\varepsilon_\circ\int_0^5\int_0^{\pi/3}\int_0^{2\pi} E^2\,r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi$$

$$E^2 = \vec{E}.\vec{E} = (2r\sin\theta\,\hat{a}_r - r\cos\theta\,\hat{a}_\theta).(2r\sin\theta\,\hat{a}_r - r\cos\theta\,\hat{a}_\theta)$$

$$E^2 = 4r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta$$

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_\circ\int_0^5\int_0^{\pi/3}\int_0^{2\pi}\left(4r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta\right) r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi$$

$$W = \frac{9}{5}5^4\pi\varepsilon_\circ \ \text{Jule}$$

Example2: A charge distribution with spherical symmetry has density

$$\rho = \begin{cases} \rho_o & \leq r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

Example3: Three point charges -1nC , 4nC , and 3nC are located at (0,0,0),(0,0,1) and (1,0,0) respectively. Find the energy in the system.

Solution:

$$W = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \Delta W_3$$

$$W = 0 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{q_1 q_2}{r_{12}}\right] + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right]$$

$$W = \frac{10^{-18}}{4\pi\varepsilon_o}\left\{\frac{(-1)(4)}{|(0,0,1)-(0,0,0)|} + \frac{(-1)(3)}{|(1,0,0)-(0,0,0)|} + \frac{(4)(3)}{|(1,0,0)-(0,0,1)|}\right\}$$

$$W = 9 \times 10^9 \times 10^{-18}\left\{\frac{-4}{1} - \frac{3}{1} + \frac{12}{\sqrt{2}}\right\} = 13.37 \times 10^{-9}\text{Jule} = 13.37 \text{ n Jule}$$

معاملات الجهد (Coefficients of potential)

ان هناك علاقة خطية بين الجهد والشحنة التي تحملها مجموعة من الموصلات والحقيقة ان جهد احد الموصلات في منظومة مكونة من N من الموصلات يعطي بالعلاقة الاتية:

$$\mathbf{U_i = \sum_{j=1}^{N} p_{ij}\, Q_j \ldots\ldots\ldots\ldots (1)}$$

باستخدام المعادلة السابقة (علاقة الطاقة الكهروستاتيكية لمجموعة مكونة من N من الموصلات)

$$\mathbf{W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} Q_i\, U_i \ldots\ldots\ldots\ldots (2)}$$

نعوض معادلة (1) في (2) نحصل على:

$$\mathbf{W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\ \sum_{j=1}^{N} p_{ij}\, Q_i Q_j \ldots\ldots\ldots\ldots (3)}$$

من الخواص العامة (general statements) لمعاملات الجهد

1- $\mathbf{p_{ij} = p_{ji}}$
2- All of the $\mathbf{p_{ij}}$ are positive كل معاملات الجهد موجبة
3- $\mathbf{p_{ij} - p_{ji} \geq 0}$

والان نثبت الخاصية الاولى وكالاتي نكتب الشغل **W** بالصيغة الاتية:

$$\mathbf{dW = \left(\frac{\partial W}{\partial Q_1}\right) dQ_1 + \cdots\ldots\ldots\ldots + \left(\frac{\partial W}{\partial Q_N}\right) dQ_N \ldots\ldots\ldots\ldots (4)}$$

اذا اخذنا فقط Q_1 متغيرة فان معادلة (4) تكون بالشكل الاتي:

$$\mathbf{dW = \left(\frac{\partial W}{\partial Q_1}\right) dQ_1 \ldots\ldots\ldots\ldots (5)}$$

$$\mathbf{dW = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\left(p_{1j} + p_{j1}\right) Q_j\, dQ_1 \ldots\ldots\ldots\ldots (6)}$$

بما ان الشغل $\mathbf{W = QU}$

$$\mathbf{dW = U_1 dQ_1 = \sum_{j=1}^{N} p_{1j} Q_j\, dQ_1 \ldots\ldots\ldots\ldots (7)}$$

من تكافئ او مقارنة معادلتين (6) و (7) نحصل على:

$$\mathbf{\frac{1}{2}\left(p_{1j} + p_{j1}\right) = p_{1j} \ldots\ldots\ldots\ldots (8)}$$

$$\mathbf{p_{1j} + p_{j1} = 2p_{1j} \Rightarrow p_{1j} = p_{j1}}$$

تمرين صفحة (10) اثبات الخاصيتين الثانية والثالثة.

معاملات المتسعة والحث (Coefficients of capacitance and induction)

$$\mathbf{Q_i = \sum_{j=1}^{N} c_{ij} U_j \ldots\ldots\ldots\ldots (1)}$$

c_{ij} تسمى معاملات المتسعة و$c_{ij}\,(i \neq j)$ معاملات الحث.

خواص معاملات المتسعة والحث

1- $\mathbf{c_{ij} = c_{ji}}$
2- $\mathbf{c_{ii} > 0}$
3- The coefficients of induction are negative or zero معاملات الحث تكون صفر او سالبة

باستخدام المعادلة السابقة

$$\mathbf{W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} Q_i\, U_i \ldots\ldots\ldots\ldots (2)}$$

نعوض معادلة (1) في (2) نحصل على:

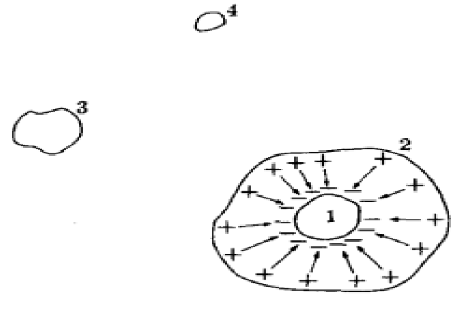
$$\mathbf{W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_{ij} U_j\, U_i \ldots\ldots\ldots\ldots (3)}$$

المتسعات (Capacitor)

الموصلان القادران على خزن شحنتين متساويتين ومتعاكستين ($\mp Q$) بصورة مستقلة عما اذا كانت الموصلات الاخرى في المنظومة مشحونة او غير مشحونة يشكلان ما يدعى باسم متسعة والشكل التالي حيث يشكل الموصلات 1 و 2 اداة من هذا النوع وبصورة عامة اذا تكونت متسعة من الموصلين 1 و 2 يمكننا كتابة الاتي:

$$\mathbf{U_1 = p_{11} Q + p_{12}(-Q) + U_x \ldots\ldots\ldots\ldots (1)}$$

$$\mathbf{U_2 = p_{12} Q + p_{22}(-Q) + U_x \ldots\ldots\ldots\ldots (2)}$$



الشكل 6-1

الموصلان 1 و 2 يشكلان متسعة . هنا $p_{31} = p_{32}$ لأنه ، حسب قانون كاوس ، اذا كان هذان الموصلان غير مشحونين لوجب أن يكونا بنفس الجهد ، بغض النظر عن الشحنة التي يحملها الموصل 3 . وبالمثل يكون $p_{41} = p_{42}$.

بطرح (2) من (1) نحصل على:

$$\Delta U = U_1 - U_2 = (p_{11} + p_{22} - 2p_{12})Q \dots \dots \dots \dots (3)$$

يكون فرق الجهد بين الموصلين في المتسعة متناسباً طردياً مع الشحنة المختزنة **Q** (من البديهي ان الشحنة الكلية المختزنة تساوي صفراً ولهذا فقد اصطلح ان تدعى الشحنة التي يحملها احد الموصلين بشحنة المتسعة) وباستخدام معادلة المتسعة

$$C = \frac{Q}{\Delta U} \dots \dots \dots \dots (4)$$

نعوض (3) في (4) نحصل على:

$$C = \frac{1}{(p_{11}+p_{22}-2p_{12})} = (p_{11} + p_{22} - 2p_{12})^{-1}$$

حيث C تدعى بسعة المتسعة ووحدة سعة المتسعة هي الفاراد (farad) وهي تساوي (كولوم / فولت) (coulomb/volt) وباستخدام المعادلات السابقة فيمكن التعبير عن طاقة المتسعة المشحونة بالصيغ الاتي:

قوانين لايجاد طاقة المتسعة هي:

$$\mathbf{W = \frac{1}{2} Q\Delta U \quad \text{or} \quad W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \quad \text{or} \quad W = \frac{1}{2}\, C(\Delta U)^2}$$

باستثناء المجال الكهربائي المتكون عند حافات لوحي المتسعة يكون المجال بين اللوحين منتظما. والمتسعة المثالية هي تلك المتسعة التي تكون فيها الفاصلة بين اللوحين **d** صغيرة جداً بالمقارنة مع ابعاد المتسعة. وعند ذلك يمكن اهمال تأثير المجال المشوه عند حافات المتسعة في الحالة المثالية. وعند ملء المنطقة المحصورة بين اللوحين بعازل ذي سماحية **ϵ** يصبح المجال الكهربائي المتكون بين اللوحين مساويا

$$\mathbf{E = \frac{1}{\epsilon}\sigma = \frac{Q}{\epsilon A}}$$

حيث ترمز **A** لمساحة احد لوحي المتسعة وبهذا يكون فرق الجهد بين اللوحين مساويا

$$C = \frac{Q}{\Delta U} = \frac{\boldsymbol{\epsilon A}}{\mathbf{d}}$$

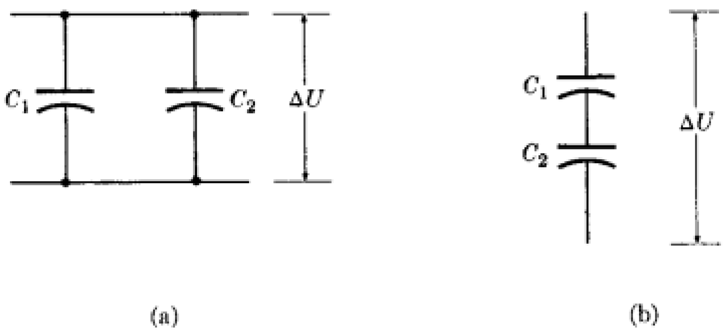
قوانين ربط المتسعة على التوازي

$$\mathbf{C = \frac{Q_{total}}{\Delta U} = C_1 + C_2}$$

الشحنة الكلية هي مجموع الشحنات وفرق الجهد يكون متساوي لكل متسعة.

قوانين ربط المتسعة على التوالي

$$\mathbf{C = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$



الشكل 3-6

(أ) توصيل المتسعات على التوازي ، (ب) توصيل المتسعات على التوالي .

الشحنة الكلية هي نفسها الشحنة في كل متسعة فرق الجهد الكلي هو مجموع الجهود على المستعة.

$$E = \frac{1}{\varepsilon}\sigma = \frac{Q}{\varepsilon A}$$

القوى والعزوم (Forces and Torques)

في هذا الفصل توصلنا الى عدداً من الطرق لحساب الطاقة الكهروستاتيكية لمنظومة شحنة وسوف نبين هنا كيف ان القوة المؤثرة على احد الاجسام لمنظومة شحنية يمكن حسابها من معرفة الطاقة الكهروستاتيكية لهذه المنظومة. نفرض اننا سوف نتعامل مع منظومة معزولة ذات مكونات مختلفة (موصلات وشحنات نقطية وعوازل) لنسمح الان لاحد هذه المكونات الواقع تحت تأثير قوى كهروستاتيكية ان يعمل ازاحة صغيرة مقدارها $d\vec{r}$ فان الشغل الميكانيكي الذي تنجزه المنظومة في مثل هذه الظروف يساوي

$$dW_m = \vec{F}.d\vec{r} \Longrightarrow \ dW_m = F_x.dx + F_y.dy + F_z.dz \ldots\ldots\ldots.(1)$$

ولما كانت المنظومة معزولة فان هذا الشغل المنجز ينبغي ان يكون على حساب الطاقة الكهروستاتيكيية W اي:

$$dW + dW_m = 0 \ldots\ldots\ldots.(2)$$

بترتيب معادلة (2) وتعويض معادلة (1) بمعادلة (2) نحصل على:

$$dW = -dW_m \Longrightarrow dW = -\left(F_x.dx + F_y.dy + F_z.dz\right)$$

نجد القوة على محور x و y و z

$$F_x = -\frac{\partial W}{\partial x} \quad , \quad F_y = -\frac{\partial W}{\partial y} \quad , \quad F_Z = -\frac{\partial W}{\partial z}$$

واذا سمحنا للجسم المعني ان يدور حول محور معين لامكن استبدال معادلة (1) بالمعادلة الاتية:

$$dW_m = \vec{\tau}.d\vec{\theta} \ \Rightarrow dW_m = \tau_1.\theta_1 + \tau_2.\theta_2 + \tau_3.\theta_3 \ \ldots\ldots\ldots.(3)$$

حيث τ تمثل العزم الدوراني الكهربائي و$d\vec{\theta}$ الازاحة الزاوية وبكتابة و $d\vec{\theta}$ بدلالة مركباتها $(\tau_1, \tau_2, \tau_3.)$ و $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ ومن المعادلتين (3) (2)

$$dW = -dW_m \Longrightarrow dW = -(\tau_1.\theta_1 + \tau_2.\theta_2 + \tau_3.\theta_3)$$

نجد العزم على محور x و y و z

$$\tau_1 = -\frac{\partial W}{\partial \theta_1} \quad , \quad \tau_2 = -\frac{\partial W}{\partial \theta_2} \quad , \quad \tau_3 = -\frac{\partial W}{\partial \theta_3}$$

قوانين الطاقة التي تم ايجادها في هذا الفصل هي:

$$\mathbf{dW = \frac{1}{2}\sum_j U_j\, dQ_j}$$

$$\mathbf{W = \frac{1}{2}\int_v \vec{D}.\vec{E}\, dv}$$

وباستخدام العلاقة $\vec{D} = \varepsilon_o \vec{E}$

$$\mathbf{W = \frac{1}{2}\int_v \varepsilon E^2\, dv}$$

و كثافة الشحنة الخطية $\boldsymbol{\omega}$

$$\boldsymbol{\omega = \frac{1}{2}\varepsilon E^2}$$

الفصل السابع

التيار الكهربائي (Electric Current)

في الفصول السابقة تعاملنا مع الشحنات الساكنة والان سوف نتعامل مع الشحنات المتحركة اي سنتعامل مع المواد الموصلة للكهرباء.

الموصل: وهو الجسم الذي تكون فيه ناقلات الشحنة طليقة الحركة.

الشحنة المتحركة تولد تياراً وعملية نقل الشحنة تدعى **التوصيل** ويعرف التيار I على انه المعدل الزمني لانتقال الشحنة عبر نقطة معينة في منظومة موصلة.

بصورة عامة فأن التيار ناتج عن حركة الشحنات في وسط معين

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{dQ}}{\mathbf{dt}} \dots\dots\dots\dots (\mathbf{1})$$

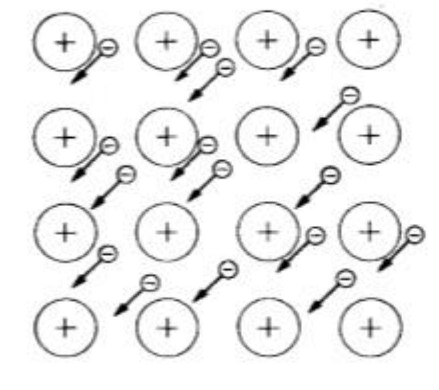
$Q = Q(t)$ صافي الشحنة المنقولة خلال زمن t

ووحدة التيار هي الامبير (Amper) وتساوي $\frac{\text{الشحنة}}{\text{الزمن(الثانية)}}$

طبيعة التيار (Nature of the current)

1- ينقل التيار في الموصل (المعادن) بواسطة الالكترونات (او حاملات التيار في المعادن (الموصل) هي الالكترونات) بينما الايونات الموجبة الثقيلة (heavy positive ion) تبقى مثبتة في مواضع منتظمة (regular positions) في التركيب البلوري لها.

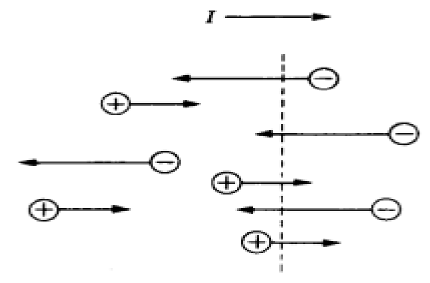
2- الكترونات التكافؤ في الذرة هي التي تكون طليقة وقادرة على المساهمة في عملية التوصيل واما بقية الالكترونات فانها مشدودة باحكام ببقية مكونات الذرة.



الشكل 1-7

رسم تخطيطي لحركة الكترونات التوصيل في المعدن

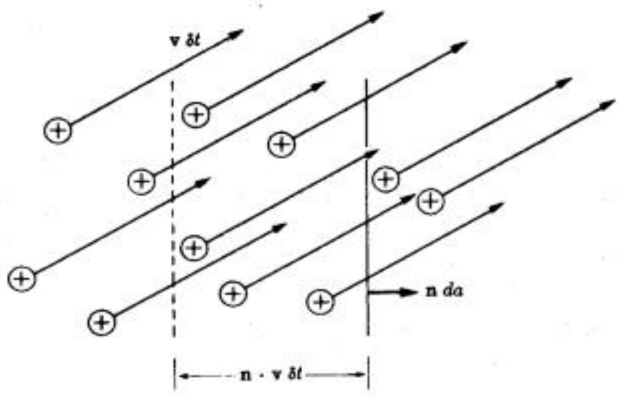
3- في المحاليل الالكتروليتية (Electrolyte) ينتقل التيار الكهربائي بواسطة الايونات الموجبة الثقيلة والسالبة (الالكترونات) معاً ولكن عملية التوصيل باحد النوعين من الايونات تكون متغلبة وسبب ذلك هو ان قسما من الايونات تتحرك بسرعة اكبر من الايونات الاخرى. وعلى الرغم من ان الايونات الموجبة والسالبة تنتقل باتجاهين متعاكسين الا ان كلا النوعين يساهم في تكوين تيار بات جاه واحد (بنفس الاتجاه same direction).



الشكل 2-7
ينتج التيار عن حركة ناقلات الشحنة الموجبة والسالبة معاً

اشتقاق كثافة التيار (current density)

ناخذ موصل له نوع واحد من ناقلات الشحنة التي تحمل شحنة قدرها q ونرمز لعدد ناقلات الشحنة بالحرف N وسوف نهمل الحركة الحرارية العشوائية للناقلات ونفرض ان جميع الناقلات ذات سرعة انجراف v (drift velocity) والان نحسب التيار خلال عنصر مساحته da كما في الشكل الاتي:



الشكل 3-7 الحركة الانجرافية لناقلات الشحنة عبر المستوي da خلال فترة زمنية أمدها δt .

وخلال زمن δt نجد ان كل شحنة تتحرك مسافة قدرها $\vec{v}\delta t$ ومن الشكل يتبين ان الشحنة δQ التي تجتاز المساحة خلال الفترة الزمنية تساوي q مضروبة في مجموع كل الناقلات التي يحتويها الحجم $v.n.\delta t.da$ اذ ان n يشير الى وحدة المتجه العمودي على المساحة da ومن خلال معادلة (1) نحصل على عنصر التيار

$$dI = \frac{\delta Q}{\delta t} = \frac{qN\vec{v}\hat{n}\delta t da}{\delta t} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

باختصار δt من معادلة (2) نحصل على:

$$dI = \sum Nq\vec{v}\,\hat{n}da \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

ان الكمية $\sum qN\vec{v}$ كمية متجهه لها ابعاد التيار لوحدة المساحة وتدعى **كثافة التيار** ويرمز لها $\vec{J}$ فنحصل على:

$$dI = \vec{J}\,.\,\hat{n}da \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

بتكامل معادلة (4) نحصل على:

$$I = \int_s \vec{J}\,.\,\hat{n}da \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

وحدة كثافة التيار هي A/m^2

اشتقاق معادلة الاستمرارية (Equation of continuity)

ان كثافة التيار J وكثافة الشحنة ρ هما كميتان غير مستقلتين وترتبطان احداهما بالاخر بمعادلة تفاضلية تسمى **معادلة الاستمرارية** واصل هذه المعادلة مستمدة اساساً من حقيقة ان الشحنة لا تخلق ولا تفنى واسهل طريقة لاشتقاق هذه المعادلة نطبق معادلة (5) على سطح كيفي مغلق (S).

$$I = -\oint_s \vec{J}\,.\,\hat{n}da \,\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

باستخدام نظرية التباعد $\oint_s \vec{A}\,.\,\hat{n}da = \int_v \mathrm{div}\,\vec{A}\,dv$ نحصل على:

$$I = -\int_v \mathrm{div}\,\vec{J}\,dv \,\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

ان الاشارة السالبة تنشأ من حقيقة ان n تمثل العمود الخارج من السطح وبما اننا نرغب في جعل التيار موجب عندما تنساب الشحنة بالاتجاه المعاكس اي من خارج الحجم V ونحو الداخل وبما ان التيار I من معادلة (1) يساوي المعدل الزمني لنقل الشحنة الى داخل الحجم V

$$I = \frac{dQ}{dt} \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

وبما ان الشحنة تساوي $Q = \int_v \rho\,dv$ فان التيار يساوي:

$$I = \frac{d}{dt}\int_v \rho\,dv \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

والان بتساوي معادلة (9) و (7) نحصل على:

$$\frac{d}{dt}\int_v \rho\,dv = -\int_v \mathrm{div}\,\vec{J}\,dv \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

بترتيب معادلة (10) نحصل على:

$$\frac{d\rho}{dt} + \mathrm{div}\,\vec{J} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

المعنى الفيزياوي: التغير الزمني في كثافة الشحنات الحجمة تنشأ عن مقدار التباعد في كثافة التيار وكلما زاد الاول زاد الثاني وبالعكس.

قانون اوم (Ohm's Law)

وجدنا عمليا ان كثافة التيار $\vec{J}$ في المعدن تتناسب طرديا مع المجال الكهربائي عند ثبوت درجة الحرارة اي:

$$\vec{J} = g\vec{E} \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

حيث g ثابت التناسب ويعرف باسم التوصيل النوعي او الموصلية (Conductivity) وهذه العلاقة تعرف باسم قانون اوم وتنطبق على عدد كبير من المواد الموصلة الشائعة وفي الحالة العامة ينبغي استبدال العلاقة (12) بالمعادلة الاتية:

$$\vec{J} = g(E)\vec{E} \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

اذ ان $g(E)$ تمثل دالة للمجال الكهربائي والمواد التي تخضع للمعادلة اعلاه تدعى اوساط خطية او اوساط اومية وسنتعامل هنا مع الاوساط الاومية. ان مقلوب التوصل النوعي (reciprocal of the conductivity) يسمى بالمقاومة النوعية (Resistivity) ويرمزها η

$$\eta = \frac{1}{g}$$

وحدة المقاومة النوعية حسب نظام (mks) هي $\frac{\text{Volt}-\text{meters}}{\text{Amper}}$ او $\text{ohm}-\text{meters}$

وحدة التوصل النوعي او الموصلية هي $\frac{1}{\text{ohm}.\text{meter}}$ او $\Omega^{-1}.\text{m}^{-1}$ او $\frac{\text{mho}}{\text{meter}}$ حيث mho هي مقلوب الاومΩ^{-1}.

لنفرض عينة موصل خاضعة لقانون اوم بشكل سلك مستقيم (straight wire) له مقطع منتظم وقد سلط على نهايته فرق جهد قدره ΔU بين نهايتي السلك ولنفرض ان السلك كان متجانس ومميز بتوصيل نوعي ثابت. تحت هذه الظروف ينشأ مجال كهربائي في السلم وهذا المجال يرتبط بفرق الجهد المسلط على طرفي السلك حسب العلاقة الاتي:

$$\Delta U = \int \vec{E}.\,d\vec{l} \dots\dots\dots\dots (14)$$

ان الشحنات الفائضة تتبدت بسرعة فائقة في الموصل وبما ان الجهد المنخفض عند احد طرفي السلك فان هذا الطرف يعد بمثابة منخفض من الطاقة تصب فيه جميع الشحنات الفائضة ولهذا فان المجال الكهربائي يكون بأكمله بالاتجاه الطولي وبالاضافة الى ذلك تكون قيمة المجال ثابتة عند جميع النقاط الواقعة على طول السلك ولهذا السبب يمكننا ان نختصر المعادلة (14) الى المعادلة الاتية:

$$\Delta U = E\, l \dots\dots\dots\dots (15)$$

ومن معادلة (15) نستخرج المجال الكهربائي

$$E = \frac{\Delta U}{l} \dots\dots\dots\dots (16)$$

حيث l طول السلك. لكن المجال الكهربائي يؤدي الى تكوين تيار ذي كثافة قدرها $J = gE$ وعليه تصبح قيمة التيار المار خلال اي مقطع في السلم مساوية الى

$$I = \int_s \vec{J}\,.\,\hat{n}da = J\,A \dots\dots\dots\dots (17)$$

حيث تشير A الى مساحة مقطع السلك. والان نعوض معادلة (12) في معادلة (17) نحصل على:

$$I = g\,E\,A \dots\dots\dots\dots (18)$$

والان نعوض معادلة (16) في معادلة (18) نحصل على:

$$I = g\,\frac{\Delta U}{l} A \dots\dots\dots\dots (19)$$

نسخرج فرق الجهد من معادلة (19)

$$\Delta U = \frac{l}{gA} I \dots\dots\dots\dots (20)$$

الكمية $\frac{l}{gA}$ تسمى بالمقاومة (Resistance) ورمزها R لذلك فان معادلة (20) تصبح بالشكل الاتي:

$$\Delta U = R\, I$$

حيث R تقاس بوحدة الاوم (Ohm) ورمزها Ω.

Example: In cylindrical coordinates, $\vec{J} = 10e^{-100r}\hat{a}_\theta A/m^2$. Find the current crossing through the region $0.01 \le r \le 0.02m$, $0 \le z \le 1m$ and intersection of this region with the constant plant.

Solution:

$$I = \int_s \vec{J}\,.\,\hat{n}da = \int_0^1 \int_{0.01}^{0.02} 10e^{-100r}\hat{a}_\theta\, drdz\hat{a}_\theta \qquad (\hat{a}_\theta.\hat{a}_\theta = 1)$$

$$I = \int_s \vec{J}\,.\,\hat{n}da = 10\int_0^1 \int_{0.01}^{0.02} e^{-100r}\, drdz = \qquad\qquad \text{Amper}$$

Example: Find the total current in outward direction from a cube of 1m, with one corner at the origin and edges parallel to the coordinate axes, if $\vec{J} = 2x^2\hat{a}_x + 2xy^3\hat{a}_y + 2xy\,\hat{a}_z A/m^2$.

Solution:

$$I = \int_s \vec{J}\,.\,\hat{n}da$$

باستخدام نظرية التباعد

$$I = \int_v \text{div}\,\vec{J}\,dv = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \vec{\nabla}.\vec{J}\ \ dxdydz$$

$$\vec{\nabla}.\vec{J} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\hat{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\hat{a}_z\right)\left(2x^2\hat{a}_x + 2xy^3\hat{a}_y + 2xy\,\hat{a}_z\right) = 4x + 6xy^2 + 0$$

$$I = \int_v \text{div}\,\vec{J}\,dv = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (4x + 6xy^2)\ \ dxdydz$$

$I =$ Amper

القوة الدافعة الكهربائية (Electromotive force)

ذكرنا سابقا ان المركبة المماسية لمجال كهروستاتيكي حول اي مسار مغلق يتلاشى اي ان

$$\oint E\, dl = 0$$

وللمادة الاومية نحد ان

$$J = g\,E$$

وفي الحالة العامة تؤول الى المعادلة الاتية

$$J = g(E)\,E)$$

ان الكمية $g(E)$ موجبة دائما. ومن هذا نستنتج ان المجال الكهروستاتيكي الخالص لا يقدر على تكوين تيار بالاتجاه نفسه حول دائرة كهربائية كاملة.او نقول انه لا يمكن تكوين تيار ثابت بواسطة قوى كهروستاتيكية خالصة.

قد يقع جسيم مشحون تحت تأثير قوى اخرى (ميكانيكية ، كيميائية ....الخ) اضافة الى القوة الكهروستاتيكية فاذا دعيت محصلة القوة لوحدة الشحنة المؤثرة على الجسيم المشحون باسم المجال الكهربائي الفعال لاصبح من غير الضروري ان يتلاشى التكامل الخطي المشار اليه في اعلاه بل يساوي

$$\oint E_{eff}\, d\vec{l} = \varepsilon$$

والكمية ε نعني بها القوة الدافعة الكهربائية ومختصرها emf تمثل ما يدعى باسم قوة السوق للتيار في الدائرة الكهربائية **ووحدتنا في النظام (mks) هي** $\frac{\text{جول}}{\text{كولوم}}$ **او** $\frac{\textbf{Joules}}{\textbf{coulomb}}$ **وهي نفس وحدات الجهد.**

التيارات المستقرة في الاوساط الخالية من مصادر قوة دافعة كهربائية

(Steady current in media without source of emf)

$$\operatorname{div}\vec{J} = \vec{\nabla}.\vec{J} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\vec{J} = g\vec{E} \ \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

نعوض معادلة (2) في (1) نحصل على:

$$\operatorname{div} g\vec{E} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

في الاوساط المتجانسة تكون g ثابتة فان معادلة (3) تكون بالشكل الاتي:

$$g\operatorname{div}\vec{E} = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

وبما ان لدينا المعادلة الاتية: $\vec{E} = -\vec{\nabla}U$ فان المعادلة (4) تكون بالشكل الاتي:

$$g\operatorname{div} -\vec{\nabla}U = -g\vec{\nabla}\vec{\nabla}U = -g\nabla^2U = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

بالقسمة على $-g$ نحصل على المعادلة الاتية:

$$\nabla^2U = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

معادلة (6) تدعى بمعادلة لابلاس (Laplace's equation).

الشروط الحدودية (Boundary condition) التي حصلنا عليها في هذه الفصل

$$J_{1n} = J_{2n}$$

ومعناها الفيزياوي ان المركبة العمودية لكثافة التيار تكون مستمرة عند الحد الفاصل بين الوسطين و

$$E_{1t} = E_{2t}$$

ومعناها الفيزياوي ان المركبة المماسية للمجال الكهربائي تكون مستمرة عند الحد الفاصل بين الوسطين.

Example: In a cylindrical conductor of radius 2mm, the current density varies with the distance from the axis according to $\vec{J} = 10^3 e^{-400r} \hat{a}_z A/m^2$. Find the total current.

Solution:

$$I = \int_s \vec{J}.\hat{n}da = \int_0^1 \int_{0.01}^{0.02} 10^3 e^{-400r} \hat{a}_z \ r\, dr d\theta \hat{a}_z \qquad (\hat{a}_\theta.\hat{a}_\theta = 1)$$

$$I = \int_s \vec{J}.\hat{n}da = 10^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{0.02} r\, e^{-400r} \ dr d\theta$$

نكامل بالنسبة للـ θ

$$I = \int_s \vec{J}.\hat{n}da = 2\pi \times 10^3 \int_0^{0.02} r\, e^{-400r} \ dr$$

يتم استخدام طريقة udv لايجاد التكامل وبعدها يتم ايجاد التيار بوحدة الامبير

الفصل الثامن

المجال المغناطيسي للتيارات الثابتة (The Magnetic Field of Steady Current)

تعريف الحث المغناطيسي (The definition of magnetic induction)

عرف المجال المغناطيسي في الفصل الثاني على انه النسبة بين القوة المؤثرة على شحنة اختبارية وقيمة الشجمة الشحنة الاختبارية وفقا للعلاقة

$$\vec{E} = \lim_{q\to 0}\left(\frac{\vec{F}}{q}\right)$$

وهذا التعريف يدل على غياب اية قوة اخرى غير القوة الكهربائية وعلى فرض ان الشحنة الاختبارية في حالة سكون.

تعريف القوة المغناطيسية (او قوة لورنتز) على انها الجزء من القوة المؤثرة على شحنة كهربائية متحركة الذي لا يعد جزءاً كهروستاتيكيا او ميكانيكياً. عند ذلك يمكن تعريف الحث المغناطيسي على انه المتجه الذي يحقق المعادلة الاتية:

$$\vec{F}_m = q\vec{v}\times\vec{B} \ldots\ldots\ldots (1)$$

لجميع السرع. وحدة الحث المغناطيسي $\vec{B}$ هي التسلا او (نيوتن – ثانية) / (كولوم – متر) $\left(\frac{\text{N-sec}}{\text{coulomb-meter}}\right)$ او نيوتن / (امبير – متر) $\left(\frac{\text{N}}{\text{Amper-meter}}\right)$ او ويبر / متر تربيع $\left(\frac{\text{Weber}}{\text{meter}^2}\right)$ حيث Webe وحدة الفيض المغناطيسي.

القوة المؤثرة على الموصلات الحاملة للتيار (Forces on current-carrying conductors)

يمكن ايجاد تعبيراً للقوة المؤثرة على عنصر $d\vec{l}$ من موصل حامل للتيار وذلك بالاعتماد على تعريف $\vec{B}$ فاذا كان المتجه d عنصرا من الموصل بالاتجاه الذي يسري فيه التيار الذي يحمله الموصل، لاصبح $d\vec{l}$ موازيا للمتجه $\vec{v}$ الذي يمثل سرعة ناقلات الشحنة في الموصل، واذا كان الموصل يحتوي على N من ناقلات الشحنة لوحدة الحجم لوجدنا ان القوة المؤثرة على العنصر $d\vec{l}$ تساوي:

$$d\vec{F} = NA\left|d\vec{l}\right|q\vec{v}\times\vec{B} \ldots\ldots\ldots (2)$$

حيث A تمثل مساحة مقطع الموصل و q شحنة كل من الناقلات. وبما ان $d\vec{l}$ و $\vec{v}$ متوازيين فان الصيغة البديلة للمعادلة (2) هي:

$$d\vec{F} = Nq|\vec{v}|Ad\vec{l}\times\vec{B} \ldots\ldots\ldots (3)$$

الكمية $NqA|\vec{v}|$ تمثل التيار الناشيء عن نوع واحد من ناقلات الشحنة

$$I = NqA|\vec{v}| \ldots\ldots\ldots (4)$$

بتعويض معادلة (4) في معادلة (3) نحصل على:

$$d\vec{F} = I\, d\vec{l}\times\vec{B} \ldots\ldots\ldots (5)$$

تمثل معادلة (5) القوة المؤثرة على عنصر متناه في الصغر من الموصل الحامل للتيار.

وعند اجراء تكامل لمعادلة (5) نحصل على القوة المؤثرة على دائرة كهربائية كاملة. واذا اعتبرنا عن الدائرة الكهربائية المعينة بمسار مغلق C لوجدنا ان

$$\vec{\mathbf{F}} = \oint_{\mathbf{C}} \mathbf{I}\, \mathbf{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\mathbf{B}} \dots\dots\dots (\mathbf{6})$$

وبما ان المتجه لا يعتمد على المكان فان التبسيط الوحيد الممكن عمله للمعادلة (6) هو اخراج العامل I خارج التكامل وبهذا نحصل على:

$$\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{I}\left\{\oint_{\mathbf{C}} \mathbf{d}\vec{\boldsymbol{l}}\right\} \times \vec{\mathbf{B}} \dots\dots\dots (\mathbf{7})$$

وذلك اصبح من السهل جدا حساب ناتج التكامل وما دام مجموع المتجهات المتناهية الصغر التي تشكل دائرة كهربائية كاملة هو المجموع المقصود فان ناتج الجمع يجب ان يساوي صفر لذلك:

$$\vec{\mathbf{F}} = \oint_{\mathbf{C}} \mathbf{I}\, \mathbf{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\mathbf{B}} = \mathbf{0} \dots\dots\dots (\mathbf{8})$$

بشرط ان يكون المجال المغناطيسي $\vec{\mathbf{B}}$ منتظماً (اي كمية ثابتة)

والكمية المهمة الاخرى هي العزم الدوراني المؤثر على دائرة كهربائية كاملة. وبما ان العزم الدوراني هو عزم القوة عندئذ يصبح بالامكان التعبير عن العنصر التفاضلي الدوراني كما يأتي:

$$\mathbf{d}\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \mathbf{dF} = \mathbf{I}\vec{\mathbf{r}} \times (\mathbf{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\mathbf{B}}) \dots\dots\dots (\mathbf{9})$$

واما العزم الدوراني الكلي المؤثر على الدائرة الكهربائية باجمعها فيساوي:

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{I}\oint_{\mathbf{c}} \vec{\mathbf{r}} \times (\mathbf{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\mathbf{B}}) \dots\dots\dots (\mathbf{10})$$

والان فك الضرب الاتجاهي للقوس في معادلة (10)

$$\mathbf{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\mathbf{B}} = \hat{\boldsymbol{a}}_{\mathbf{x}}(\mathbf{dyB_z} - \mathbf{dzB_y}) - \hat{\boldsymbol{a}}_{\mathbf{y}}(\mathbf{dxB_z} - \mathbf{dzB_x}) + \hat{\boldsymbol{a}}_{\mathbf{z}}(\mathbf{dxB_y} - \mathbf{dyB_x})$$

$$\mathbf{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\mathbf{B}} = \hat{\boldsymbol{a}}_{\mathbf{x}}(\mathbf{dyB_z} - \mathbf{dzB_y}) + \hat{\boldsymbol{a}}_{\mathbf{y}}(\mathbf{dzB_x} - \mathbf{dxB_z}) + \hat{\boldsymbol{a}}_{\mathbf{z}}(\mathbf{dxB_y} - \mathbf{dyB_x}) \dots\dots\dots (\mathbf{11})$$

والان اصبح من السهل الحصول على مركبات الكمية $\vec{r} \times (d\vec{l} \times \vec{B})$ (الضرب الاتجاهي الثلاثي) كما يأتي:

$$\left[\vec{\mathbf{r}} \times (\mathbf{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\mathbf{B}})\right]_{\mathbf{x}} = \mathbf{ydxB_y} - \mathbf{ydyB_x} - \mathbf{zdzB_x} + \mathbf{zdxB_z}$$

$$\left[\vec{\mathbf{r}} \times (\mathbf{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\mathbf{B}})\right]_{\mathbf{y}} = \mathbf{zdyB_x} - \mathbf{zdzB_y} - \mathbf{xdxB_y} + \mathbf{xdyB_x} \qquad \dots\dots\dots (\mathbf{12})$$

$$\left[\vec{\mathbf{r}} \times (\mathbf{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\mathbf{B}})\right]_{\mathbf{z}} = \mathbf{xdzB_x} - \mathbf{xdxB_z} - \mathbf{ydyB_z} + \mathbf{ydzB_y}$$

ولحساب ناتج التكاملات نحصل

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{x}} = \mathbf{I}\oint_{\mathbf{c}}\left[\vec{\mathbf{r}} \times (\mathbf{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\mathbf{B}})\right]_{\mathbf{x}} = \mathbf{I}\left(\mathbf{A_yB_z} - \mathbf{A_zB_y}\right) \dots\dots\dots (\mathbf{13})$$

وبالمثل يمكننا الحصول على تعابير مماثلة لمركبة العزم الدوراني باتجاه y والاتجاه z وهذه الصيغ الثلاث للمركبات يمكن دمجها بتعبير واحد هو

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{I}\,\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} \ldots\ldots\ldots (\mathbf{14})$$

اذ ان $\vec{A}$ متجه ذو مركبات تمثل المساحات المتكونة من اسقاط المنحني C على السطوح XY و ZX وZY والكمية I A تدعى العزم المغناطيسي للدائرة الكهربائية ويرمز لها بالرمز m.

$$\vec{\mathbf{m}} = \mathbf{I\,A} \ldots\ldots\ldots (\mathbf{15})$$

من السهل ان نبين وباستخدام الاسلوب المستعمل في اعلاه ان تكامل الكمية $\vec{r} \times d\vec{l}$ حول مسار مغلق يمثل ضعف المساحة التي يكونها المنحني C لذلك

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\oint_{\mathbf{c}} \vec{\mathbf{r}} \times \mathbf{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \mathbf{A} \ldots\ldots\ldots (\mathbf{16})$$

وبذلك نحصل على

$$\vec{\mathbf{m}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{I} \oint_{\mathbf{c}} \vec{\mathbf{r}} \times \mathbf{d}\vec{\boldsymbol{l}} \ldots\ldots\ldots (\mathbf{17})$$

وهذه الكمية تمثل تعبيراً اخر للعزم المغناطيسي والان نجد انه من الملائم ان نستفيد من المتطابقة

$$\vec{\mathbf{I}}\,\mathbf{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \vec{\mathbf{J}}\,\mathbf{dv} \ldots\ldots\ldots (\mathbf{18})$$

عندما يسري التيار خلال وسط موصل ولا يكون محصورا في اسلاك كهربائية وبهذا نحصل على التعبير الرياضي الاتي:

$$\mathbf{d}\vec{\mathbf{m}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{J}}\,\mathbf{dv} \ldots\ldots\ldots (\mathbf{19})$$

وهو تعبير مفيد لشرح الخواص المغناطيسي للمواد.

لذلك فان العزم يمكن تعريفه

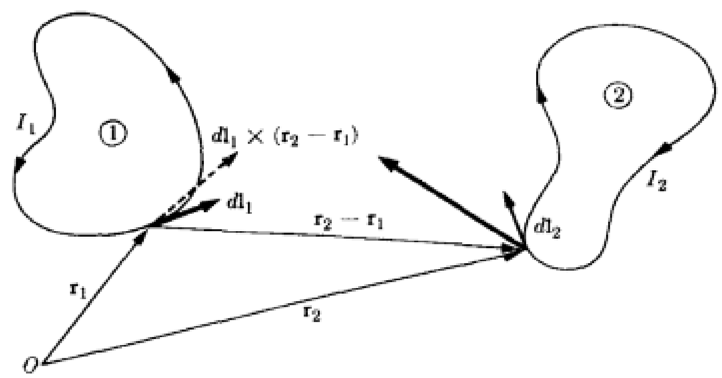
$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{m}} \times \vec{\mathbf{B}} \ldots\ldots\ldots (\mathbf{20})$$

قانون بايوت وسافات (The law of Biot and Savart)

في عام 1890 وبالضبط بعد اسابيع من اعلان اورستد اكتشافه بان التيارات الكهربائية تولد مجالات مغناطيسية، استطاع امبير ان يضع نتائج سلسلة من التجارب العملية في معادلات رياضية يمكن صياغتها بدلالة الرياضيات المعاصر في معادلة واحدة وهي:

$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{2}} = \frac{\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{o}}}{\mathbf{4\pi}}\mathbf{I}_{\mathbf{1}}\mathbf{I}_{\mathbf{2}} \oint_{\mathbf{1}}\oint_{\mathbf{2}} \frac{\mathbf{d}\vec{\boldsymbol{l}}_{\mathbf{2}} \times \left[\mathbf{d}\vec{\boldsymbol{l}}_{\mathbf{1}} \times (\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{2}} - \vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{1}})\right]}{|\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{2}} - \vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{1}}|^{\mathbf{3}}} \ldots\ldots\ldots (\mathbf{21})$$

حيث $d\vec{l}_1$ و $d\vec{l}_2$ و $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ معرفة من الشكل التالي. والكمية $\frac{\mu_o}{4\pi}$ في معادلة (21) تلعب نفس دور الكمية $\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}$ في الكهرباء المستقرة وقيمتها $\frac{\mu_o}{4\pi} = 10^{-7}\ \mathrm{n/amp^2}$ حيث $\mu_o = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{n/amp^2}$



الشكل (3-8): التأثير المغناطيسي المتبادل بين دائرتين كهربائيتين

وبما ان $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$

ومن معادلة (6) فان العلاقة (21) تدل ضمنا على ان:

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}_2) = \frac{\boldsymbol{\mu_o}}{\mathbf{4\pi}} \mathbf{I_1} \oint_1 \frac{\mathbf{d}\vec{\boldsymbol{l}}_1 \times (\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1)}{|\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1|^3} \dots\dots\dots (\mathbf{22})$$

وما هذه العلاقة سوى تعميم لقانون بايوت وسافارت كما يطلق هذا الاسم كذلك على الصيغة التفاضلية لهذه العلاقة وهي:

$$\mathbf{d}\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}_2) = \frac{\boldsymbol{\mu_o}}{\mathbf{4\pi}} \frac{\mathbf{I_1}\ \mathbf{d}\vec{\boldsymbol{l}}_1 \times (\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1)}{|\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1|^3} \dots\dots\dots (\mathbf{23})$$

وباستخدام $\vec{I}\, d\vec{l} = \vec{J}\, dv$ لتوزيع مستمر للتيار الذي يوصف بدلالة الكثافة $\vec{J}$ يمكن التعبير عن المعادلتين (22) و(23) بالصيغتين الاتيتين:

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}_2) = \frac{\boldsymbol{\mu_o}}{\mathbf{4\pi}} \int_{\mathbf{v}} \frac{\vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}}_1) \times (\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1)}{|\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1|^3} \mathbf{dv_1} \dots\dots\dots (\mathbf{24})$$

$$\mathbf{d}\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}_2) = \frac{\boldsymbol{\mu_o}}{\mathbf{4\pi}} \frac{\vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}}_1) \times (\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1)}{|\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1|^3} \mathbf{dv_1} \dots\dots\dots (\mathbf{25})$$

وتشير الاستنتاجات التجريبية الى امكانية وصف جميع مجالات الحث المغناطيسية بدلالة توزيع التيار الكهربائي. وهذا يعني ان B دائما تأخذ هيئة المعادلة (24) مع الاخ بنظر الاعتبار توزيع التيار المتمثلة بقيمة $\vec{J}(\vec{r}_1)$ وهذا يدل ضمنا على انه لا توجد اقطاب مغناطيسية معزولة.

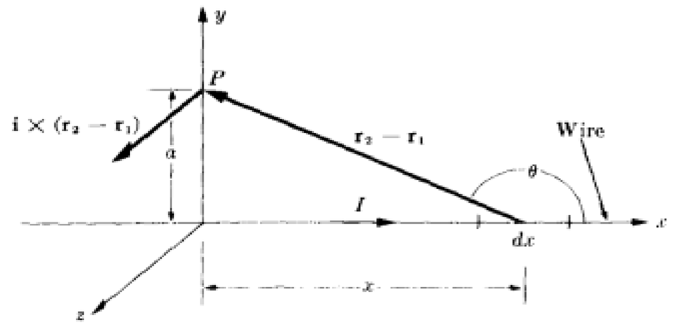
$$\mathbf{div}\ \vec{\mathbf{B}} = \mathbf{0} \dots\dots\dots (\mathbf{26})$$

معادلة (26) هي تصح لاي $\vec{B}$ سواء بمعادلة (22) و (24)

اعداد الطالب: علي وسام هليل الدلفي

تطبيقات قانون بايوت وسافارت (Elementary applications of the Biot and savart law)

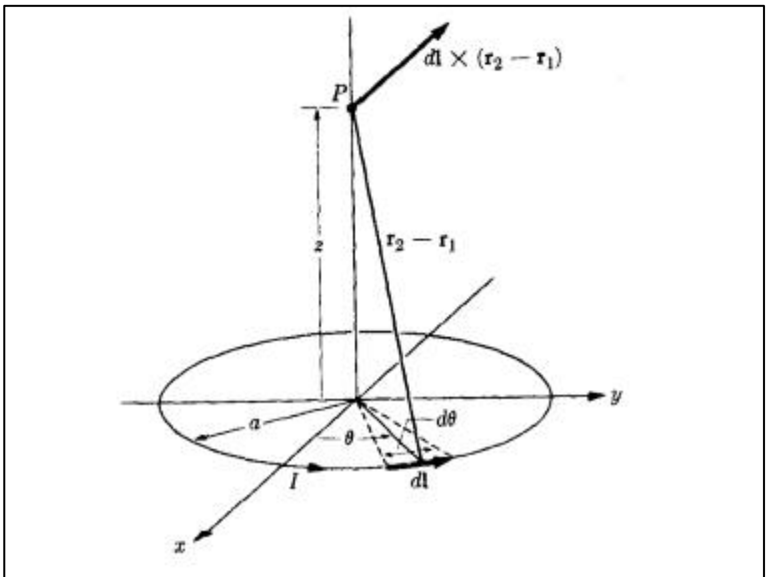
Example1: Calculate the magnetic field due to a long straight wire



الشكل 4-8 المجال المغناطيسي الناشيء عن سلك مستقيم طويل عند نقطة P .

اعداد الطالب: علي وسام هليل الدلفي

Example2: Calculate the magnetic field produced by a circular turn (loop) of radius a carrying a current I on its axis.



الشكل 5–8 المجال المغناطيسي المحوري لسلك يصنع لفة دائرية

قانون امبير للدائرة الكهربائية (Ampere's Circuital law)

المجالات المغناطيسية المعطاة في المعادلات (22) و(24) فان تلك المجالات تنشأ عن التيارات الثابتة اي ان التيارات تخضع للعلاقة:

$$\mathbf{div\,\vec{J} = 0 \ldots\ldots\ldots (27)}$$

هذه المعادلة جداً مهمة لايجاد التفاف $\vec{\mathbf{B}}$ ويمكن اشتقاقها. ويتم ذلك ببساطة بحساب التفاف معادلة (24) اي:

$$\mathbf{curl\,\vec{B}(\vec{r}_2) = \mu_o\,\vec{J}(\vec{r}_1) \ldots\ldots\ldots (28)}$$

حيث تسمى معادلة (28) **بالصيغة التفاضلية لقانون امبير**. معادلة (28) ستبقى صالحة طالما بقيت $\mathrm{div}\,\vec{J} = 0$ بشرط لا توجد مواد مغناطيسية وباستخدام نظرية ستوكس نحول معادلة (28) الى صيغة تكاملية تكون ذات فائدة كبيرة في بعض الاحيان. وعند تطبيق نظرية ستوكس فان تكتب بالشكل الاتي:

$$\int_s \mathbf{curl\,\vec{B}(\vec{r}_2)\,\vec{n}\,da} = \oint_C \mathbf{\vec{B}\,d\vec{\mathit{l}} \ldots\ldots\ldots (29)}$$

وبتعويض عن $\mathbf{curl\,\vec{B}}$ من معادلة (28) ينتج:

$$\oint_C \mathbf{\vec{B}\,d\vec{\mathit{l}} = \mu_o} \int_s \mathbf{\vec{J}.\vec{n}\,da \ldots\ldots\ldots (30)}$$

الحث المغناطيسي $\vec{B}$ هو متعلق بشدة المجال المغناطيسي $\vec{H}$ في الفراغ بواسطة العلاقة الاتية:

$$\mathbf{\vec{B} = \mu_o\,\vec{H}}$$

لذلك الصيغة التكاملية والتفاضلية لقانون امبير في شروط شدة المجال المغناطيسي $\vec{H}$ تاخذ الصيغ:

$$\oint_C \mathbf{\vec{H}\,d\vec{\mathit{l}}} = \int_s \mathbf{\vec{J}.\vec{n}\,da = I \ldots\ldots\ldots (31)}$$

وهذا يعني $\mathbf{curl\,\vec{H} = \vec{J}}$

وبكل بساطة فان التكامل الخطي لـ$\vec{\mathbf{B}}$ حول مسار مغلق يساوي $\mathbf{\mu_o}$ مضرباً في التيار الكلي المار خلال هذا المسار

وفي هذه الحالة فان $\vec{\mathbf{B}}$ عند مسافة r من الموصل تعطي بالعلاقة الاتي:

$$\mathbf{B(r) = \frac{\mu_o I}{2\pi r}}$$

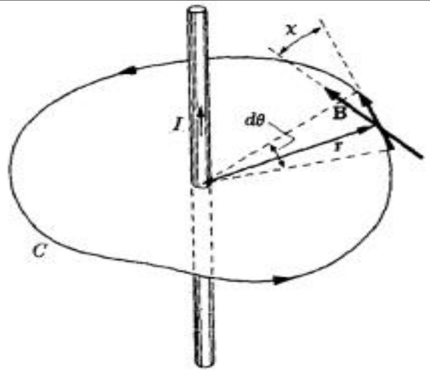
ولمماساً لدائرة نصف قطرها r ذات مركز منطبق على محور الموصل كم في الشكل التالي. يكون سريان التيار في السلك نحو الاعلى ويوخذ C اتجاه للمسار معاكس لعقرب الساعة ومن هذا الشكل يتبين ان:

$$\mathbf{\vec{B}\,d\vec{\mathit{l}} = |\vec{B}|\,|d\vec{\mathit{l}}|\cos x = |\vec{B}|\,r d\theta \ldots\ldots\ldots (32)}$$

وباستخدام العلاقة $\mathbf{\vec{B}(r) = \frac{\mu_o I}{2\pi r}}$ فان معادلة (32) تكون بالشكل الاتي:

$$\oint_C \vec{B}\, d\vec{l} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_o I}{2\pi r} r d\theta = \mu_o I \ldots\ldots\ldots (35)$$

وهذه المعادلة تمثل حالة خاصة للعلاقة (30) وان قانون امبير معادلة (30) بعد مشابها لقانون كاوس في الكهربائية المستقرة في كثير من الاعبارات. وهذا يعني انه يمكننا ان نستخدمه في الحصول على المجال المغناطيسي الناشيء عن توزيع تياري معين ذي تماثل عالي بدلاً الخوض في حسابات التكاملات المعقدة التي تنتج من جراء تطبيق قانون بايوت.



الشكل 8-8

تحقيق قانون أمبير في حالة السلك المستقيم الطويل .

Example3: Obtain an expression for the $\vec{H}$ field in all regions of a cylindrical conductor carries a direct current I and its radius is R meter.

Example4: A-z directed current distribution is given by $\vec{J} = (r^2 + br)$ for $r \leq a$. Find the magnetic induction $\vec{B}$ at any point $r \geq a$ using Ampere's circuital law.

الفيض المغناطيسي (Magnetic Flux)

الكمية التالية:

$$\mathbf{\Phi} = \int_{s} \vec{\mathbf{B}}.\hat{\mathbf{n}}\mathbf{da} \ldots\ldots\ldots (\mathbf{36})$$

تعرف بالفيض المغناطيسي ويقاس باوحدة الويبر (Weber) وعلى الرغم من وجود تناظر بين الفيض المغناطيسي والفيض الكهربائي الا ان الفيض المغناطيسي يتفوق كثيراً في الاهمية على الفيض المغناطيسي والفيض المغناطيسي خلال سطح مغلق يساوي صفر.

$$\mathbf{\Phi} = \int_{s} \vec{\mathbf{B}}.\hat{\mathbf{n}}\mathbf{da} = \int_{v} \mathbf{div}\,\vec{\mathbf{B}}\,\mathbf{dv} = \mathbf{0} \ldots\ldots\ldots (\mathbf{37})$$

وهذه القانون يسمى بقانون الحفظ للفيض المغناطيسي او الصيغة التكاملية لقانون كاوس للمجال المغناطيسي.

ومن معادلة (37) فان $\mathbf{dv}$ لا تساوي صفر لذلك

$$\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{B}} = 0 \ldots\ldots\ldots (\mathbf{38})$$

والتباعد للفيض المغناطيسي هو دائما يساوي صفر. وهذا يسمى بالصيغة التفاضلية لقانون كاوس للفيض للمجال المغناطيسي.

حصلنا في هذه الفصل على علاقات مهمة منها:

$$\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{B}} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{J}} = \mathbf{0}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{o}}\,\vec{\mathbf{H}}$$

$$\mathbf{curl}\,\vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{J}}$$

$$\mathbf{curl}\,\vec{\mathbf{B}} = \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{o}}\,\vec{\mathbf{J}}$$

Example5: A radial field, $\vec{H} = \frac{2.39\times10^6}{r} \cos\theta \, \hat{a}_r$ A/m exists in free space. Find the magnetic flux crossing the surface defined by $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ and $0 \le z \le 1$m.

Solution:

$$\vec{B} = \mu_o \vec{H} = 4\pi \times 10^{-7}(2.39 \times 10^6)\frac{\cos\theta}{r} \, \hat{a}_r \qquad \text{Tsla}$$

$$\Phi = \int_s \vec{B}.\hat{n}da = 4\pi \times 10^{-7}(2.39 \times 10^6)\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\theta}{r} rd\theta dz$$

$$\Phi = 4\pi \times 10^{-7}(2.39 \times 10^6)\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta \, d\theta dz = \qquad\qquad \text{Weber}$$

Example6: In a certain conducting region, $\vec{H} = yz(x^2 + y^2)\,\hat{a}_x - y^2xz\,\hat{a}_y + 4x^2y^2\hat{a}_z$ A/m a) Determine the current density $\vec{J}$ at (5,2,-3) b) show that $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$.

Example7: Find the flux passing the portion of the plane $\theta = \frac{\pi}{4}$ defined by $0 \leq z \leq 2\mathrm{m}$ and $0.01 \leq r \leq 0.05\mathrm{m}$. A current filament of 2.5 Ampere is along the z-axis in the $\hat{a}_z$ direction, in free space.

الجهد المغناطيسي المتجه (The magnetic vector potential)

ان التباعد لاي التفاف يساوي صفر $\operatorname{div}\ \vec{B} = \vec{\nabla}.(\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$ حيث

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}} = \mathbf{curl}\ \vec{\mathbf{A}} \ldots\ldots\ldots (39)$$

حيث $\vec{A}$ الجهد المنغاطيسي للمتجه وبما ان $\operatorname{curl} \vec{B} = \mu_o \vec{J}$ (قانون امبير) فيمكن كتابة الاتي:

$$\mathbf{curl}\ \vec{\mathbf{B}} = \mathbf{curl\ curl}\ \vec{\mathbf{A}} = \boldsymbol{\mu_o}\ \vec{\mathbf{J}} \ldots\ldots\ldots (40)$$

وباستخدام المتطابقة $\operatorname{curl}\operatorname{curl}\vec{A} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} - \nabla^2\vec{A}$ فان معادلة (40) تكون بالشكل الاتي:

$$\mathbf{curl}\ \ \vec{\mathbf{B}} = \mathbf{curl\ curl}\ \vec{\mathbf{A}} = \mathbf{grad\ div}\ \vec{\mathbf{A}} - \nabla^2\ \vec{\mathbf{A}} = \boldsymbol{\mu_o}\ \vec{\mathbf{J}} \ldots\ldots\ldots (41)$$

وعند الحالة $\operatorname{div}\vec{A} = 0$ فان

$$\nabla^2\vec{\mathbf{A}} = -\boldsymbol{\mu_o}\ \vec{\mathbf{J}} \ldots\ldots\ldots (42)$$

معادلة (42) تسمى بمعادلة بواسون للمجال المغناطيسي الساكن (poisson's equation static magnetic field).

والجهد المغناطيسي المتجه يمكن الحصول عليه

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}_2) = \frac{\boldsymbol{\mu_o}}{\mathbf{4\pi}}\int_{\mathbf{v}} \frac{\vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}}_1)}{\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1}\mathbf{dv_1} \ldots\ldots\ldots (43)$$

نحن حصلنا على معادلة (43) بواسطة تحويل معادلة (24) الى صيغة معادلة (39) وبملاحظة

$$\frac{\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1}{|\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1|^3} = -\mathbf{grad}_2\ \frac{1}{|\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1|} \ldots\ldots\ldots (44)$$

حيث $\mathbf{grad}_2$ تشير الى ان التفاضل قد اخذ بالنسبة الى $\vec{\mathbf{r}}_2$ والمتطابقة الاتجاهية

$$\mathbf{curl}\ \boldsymbol{\varphi}\vec{\mathbf{A}} = \boldsymbol{\varphi}\ \mathbf{curl}\ \vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{A}}\ \mathbf{grad}\ \boldsymbol{\varphi} \ldots\ldots\ldots (45)$$

تصدق لكل متجه مثل $\vec{\mathbf{A}}$ ولكل لا متجه (عددي) مثل $\boldsymbol{\varphi}$ ومنها ينتج

$$\mathbf{curl}_2\left\{\frac{1}{|\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1|}\vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}}_1)\right\} = -\vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}}_1) \times \mathbf{grad}_2\ \frac{1}{|\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1|} \ldots\ldots\ldots (46)$$

وذلك لان $\vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}}_1)$ لا تعتمد على المتجه $\vec{\mathbf{r}}_2$ وبادخاهذه النتائج في معادلة (24) نحصل على(بصيغة اخرى نعوض معادلة (44) في معادلة (24) وناتجها يقارن مع معادلة (46):

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}_2) = \frac{\boldsymbol{\mu_o}}{\mathbf{4\pi}}\int_{\mathbf{v}} \frac{\vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}}_1) \times (\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1)}{|\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1|^3}\mathbf{dv_1} \ldots\ldots\ldots (24)$$

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}_2) = -\frac{\boldsymbol{\mu_o}}{\mathbf{4\pi}}\int_{\mathbf{v}} \vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}}_1) \times \mathbf{grad}_2\ \frac{1}{|\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1|}\mathbf{dv_1}$$

$$\vec{B}(\vec{r}_2) = -\frac{\mu_o}{4\pi}\int_v \mathrm{curl}_2 \frac{\vec{J}(\vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} dv_1 \dots\dots\dots (47)$$

والان يمكن اخراج الالتفاف خارج علامة التكامل وبهذا فان الجهد المغناطيسي الاتجاهي هو

$$\vec{A}(\vec{r}_2) = \frac{\mu_o}{4\pi}\int_v \frac{\vec{J}(\vec{r}_1)}{\vec{r}_2 - \vec{r}_1} dv_1 \dots\dots\dots (48)$$

الجهد المغناطيسي اللامتجه (The magnetic scalar potential)

الصيغة التفاضلية لقانون امبير$(28)\dots\dots\dots$ $\mathrm{curl}\,\vec{B}(\vec{r}_2) = \mu_o\,\vec{J}(\vec{r}_1)$ تشير الى ان الالتفاف الحث المغناطيسي يساوي صفر امبير $\mathrm{curl}\,\vec{B}(\vec{r}_2) = 0$ حيثما تكون كثافة التيار صفراً عند ذلك يمكننا التعبير عن الحث النغناطيسي في مناطق من هذا النوع كانحدار الجهد لا متجه

$$\vec{B} = -\mu_o\,\mathrm{grad}\,U_m \dots\dots\dots (49)$$

حيث U_m تدعى بالجهد المغناطيسي اللامتجه وعند تعويض معادلة (49) لنحصل على معادلة لابلاس

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = -\mu_o\,\vec{\nabla}.\vec{\nabla}U_m = -\mu_o\nabla^2 U_m = 0$$

حيث $\nabla^2 U_m = 0$ تدعى بمعادلة لابلاس (Laplace's equation) للمجال المغناطيسي.

اعداد الطالب: علي وسام هليل الدلفي

الفصل التاسع

الحث الكهرومغناطيسي ومعادلات ماكسويل
(Electromagnetic induction and Maxwell's equations)

الحث الكهرومغناطيسي (Electromagnetic induction)

قانون فارداي في الحث الكهرومغناطيسية

$$\boldsymbol{\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}} \ldots\ldots\ldots (\mathbf{1})$$

وهذا يعني ان التغير الحاصل في الفيض المغناطيسي خلال دائرة كهربائية يكون مصحوباً بقوة دافعة كهربائية وهذه ما يعرف باسم قانون فراداي في الحث الكهرومغناطيسي.

ووجد ان النتيجة لا تعتمد على الطريقة التي يتغير بها الفيض اذ يمكن ان تشوه الدائرة الكهربائية او تحرك او تغير قيمة B داخل الدائرة الكهربائية.

ان المعادلة (1) تمثل قانون تجريبي مستقلاً لا يمكن اشتقاقه من قوانين تجريبية اخرى. وهي بالتأكيد ليست نتيجة لقانون حفظ الطاقة المستخدم في موازنة الطاقات للتيارات في المجالات المغناطيسية. ولاشتقاق قانون فراداي من تعريف القوة الدافعة الكهربائية (في الفصل السابق)

$$\boldsymbol{\varepsilon = \oint \vec{E}.\, d\vec{l}} \ldots\ldots\ldots (\mathbf{2})$$

والفيض المغناطيسي الذي تعرفنا عليه في الفصل السابق

$$\boldsymbol{\Phi = \int_s \vec{B}.\, \hat{n} da} \ldots\ldots\ldots (\mathbf{3})$$

بمساواة معادلة (2) و (1) نحصل على:

$$\boldsymbol{\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = \oint \vec{E}.\, d\vec{l}} \ldots\ldots\ldots (\mathbf{4})$$

بتعويض معادلة (3) في (4) نحصل على:

$$\boldsymbol{\oint \vec{E}.\, d l = -\frac{d}{dt}\int_s \vec{B}.\, \hat{n} da} \ldots\ldots\ldots (\mathbf{5})$$

وبتطبيق نظرية ستوكس على الطرف الايسر لمعادلة (5) نحصل على

$$\boldsymbol{\int_s \mathrm{curl}\, \vec{E}.\, \hat{n} da = -\frac{d}{dt}\int_s \vec{B}.\, \hat{n} da} \ldots\ldots\ldots (\mathbf{6})$$

بعد الاختصارات لمعادلة (6) نحصل على

$$\boldsymbol{\mathrm{curl}\, \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}} \ldots\ldots\ldots (\mathbf{7})$$

تمثل معادلة **(7) بالصيغة التفاضلية لقانون فاراداي**

Example: A circular loop conductor lies in plane z=0 and has a radius of 0.1m and resistance of 5Ω. Given the magnetic flux density $\vec{B} = 0.2 \sin 10^3 t \ \hat{a}_z$ (Tesla). Determine the current in the loop.

يكون الحل بثلاث خطوات

نجد اولا الفيض المغناطيسي باستخدام العلاقة الاتية:

$$\Phi = \int_s \vec{B}.\hat{n}da = \int_0^{2\pi}\int_0^{0.1} 0.2 \sin 10^3 t \ r\,dr\,d\,\theta \hat{a}_z = (\qquad\qquad) \quad \text{Weber}$$

ثم نجد القوة الدافعة الكهربائية باستخدام العلاقة الاتية:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(\qquad\qquad) \quad \text{Volt}$$

واخيرا نجد التيار الكهربائي باستخدام قانون اوم

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \qquad\qquad \text{Amper}$$

Example: A area of 0.65m^2 in the plane z=0 encloses a filamentart conductor. Find the induced voltage if $\vec{B} = 0.05\cos 10^3 t\left(\frac{\hat{a}_z+\hat{a}_z}{\sqrt{2}}\right)$ Tesla

نجد الفيض المغناطيسي باستخدام العلاقة الاتية:

$$\Phi = \int_s \vec{B}.\hat{n}da = \int_s 0.05\cos 10^3 t\left(\frac{\hat{a}_z + \hat{a}_z}{\sqrt{2}}\right)da = (\qquad\qquad\qquad)\quad \text{Weber}$$

ثم نجد القوة الدافعة الكهربائية باستخدام العلاقة الاتية:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(\qquad\qquad\qquad)\quad \text{Volt}$$

الحث الذاتي (Self-inductance)

لايجاد العلاقة بين الفيض والتيار الذي يسري في دائرة كهربائية معزولة والهدف من ذلك هو ادخال الحث الذاتي وهو احد المعالم العملية للدوائر الكهربائية.

الفيض المغناطيسي خلال دائرة كهربائية معزولة يعتمد على الشكل الهندسي للدائرة.

ان اعتماد الفيض المغناطيسي على تيار الدائرة يكون خطياً

من قانون فراداي التجريبي معادلة (1)

$$\boldsymbol{\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} \dots\dots\dots (1)}$$

بالاجراء الاتي:

$$\boldsymbol{\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi}{dt}\frac{dI}{dI} = \frac{d\Phi}{dI}\frac{dI}{dt} \dots\dots\dots (8)}$$

ان التغير الفيض بالنسبة للتيار يدعى بالحثية L (inductance) او يسمى بمعامل الحث الذاتي

$$\boldsymbol{L = \frac{d\Phi}{dI} \dots\dots\dots (9)}$$

لذلك فان معادلة (**8**) تصبح بالشكل الاتي:

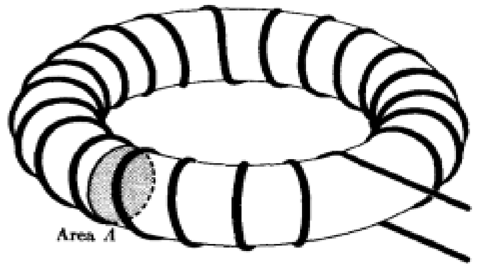
$$\boldsymbol{\frac{d\Phi}{dt} = L\frac{dI}{dt} \dots\dots\dots (10)}$$

بتعويض معادلة (**10**) في معادلة (1) نحصل على:

$$\boldsymbol{\varepsilon = -L\frac{dI}{dt} \dots\dots\dots (11)}$$

القوة الدافعة الكهربائية المحتثة (The induced emf)

ولتوضيح استعمال معادلة (9) في حساب الحثية سنعمد الى حساب الحثية الذاتية لملف حلزوني حلقي كالملف. كما مبين في الشكل الاتي:



الشكل 2-9 ملف حلزوني حلقي

من قانون امبير نجد ان الحث المغناطيسي داخل لفات الملف يساوي

$$B = \frac{\mu_o N I}{l}$$

حيث N تمثل عدد اللفات وl متوسط طول الحلقة وI التيار الذي يسري في الدائرة والفيض المغناطيسي الذي يتخلل كل لفة من لفات الملف يساوي

$$\Phi_1 = \frac{\mu_o N I}{l} A$$

عندئذ يصبح الفيض الكلي خلال جميع لفات الملف وعددها N مساوياً لـ

$$\Phi = \frac{\mu_o N^2 I}{l} A$$

وبالتالي فان الحثية تصبح:

$$L = \frac{d\Phi}{dI} = \frac{d}{dI}\left(\frac{\mu_o N^2 I}{l} A\right) = \frac{\mu_o N^2}{l} A$$

وحدة معامل الحث الذاتي هي الهنري (Henry) وتساوي ($\frac{\text{V.sec}}{\text{Amper}}$) (واحد فولت – ثانية / امبير)

الحثية المتبادل (Mutual inductance)

في الفقرة السابقة تم التعامل مع الدوائر الكهربائية المعزولة فقط ولهذا فان الفيض المغناطيسي خلال الدائرة الكهربائية ناتجا عن التيار الذي يسري في الدائرة ذاتها. والان نفرض وجود n من الدوائر الكهربائية ولتكن الدائرة الكهربائية المؤشرة بالحرف i بالشكل الاتي:

$$\Phi_i = \Phi_{i1} + \Phi_{i2} + \Phi_{i3} + \cdots \Phi_{ii} + \cdots \Phi_{in} = \sum_{j=1}^{n} \Phi_{ij} \ldots\ldots (12)$$

وهذا يعني ان الفيض يساوي مجموع قيم الفيض لكل واحدة من الدوائر الكهربائية التي يبلغ عددها n اذ ان الكمية Φ_{ii} تمثل الفيض خلال الدائرة الكهربائية التي تحمل الرقم i الناتج عن مرور التي في الدائرة الكهربائية الاولى والثانية والثالثة الى n وبذلك يمكن كتابة القوة الدافعة الكهربائية المحتثة في الدائرة i بالشكل (ε_i) وسوف يساوي (اي تعويض معادلة (12) في معادلة (1) نحصل على):

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi_i}{dt} = -\left[\frac{d\Phi_{i1}}{dt} + \frac{d\Phi_{i2}}{dt} + \frac{d\Phi_{i3}}{dt} + \cdots + \frac{d\Phi_{ii}}{dt} + \cdots \frac{d\Phi_{in}}{dt}\right] = -\sum_{j=1}^{n} \frac{d\Phi_{ij}}{dt} \ldots (13)$$

واذا كانت كل واحدة من هذه الدوائر الكهربائية صبية وثابتة فان التغير الوحيد التي يمكن ان تحدث في $\Phi_{ij}'s$ هي تلك التغيرات التي تنشأ في قيم التيار لذلك:

$$\frac{d\Phi_{ij}}{dt} = \frac{d\Phi_{ij}}{dt}\frac{dI_j}{dI_j} = \frac{d\Phi_{ij}}{dI_j}\frac{dI_j}{dt}$$

تعد المعاملات $\frac{d\Phi_{ij}}{dI_j}$ ثوابتاً مستقلة عن التيارات ولا تعتمد على اليتار. لذلك تعرف الكمية

$$M_{ij} = \frac{d\Phi_{ij}}{dI_j} \ldots\ldots (14)$$

وتعرف على انها الحثية المتبادلة بين الدائرة الكهربائية **i** والدائرة الكهربائية **j** حيث $\mathbf{M_{ij}} = \mathbf{M_{ji}}$ والكمية $\frac{\mathbf{d\Phi_{ij}}}{\mathbf{dI_j}}$ هي بالضبط ما يسمى الحثية الذاتية للدائرة الكهربائية **i** والتي يرمز لها $\mathbf{L_i}$ او $\mathbf{M_{ii}}$ ووحدة الحثية المتبادلة هي نفس وحدة الحثية الذاتية (هنري).

ولناخذ مثال وليكن المثال السابق وهو حساب الحثية المتبادلة للملف الحلزوني الحلقي المبين في الشكل السابق ونضيف ولكن الان نضيف اليه ملفا اخر عدد لفاته **N2** في هذه الحالة يولد التيار الذي يسري في الملف الاول وقدره I_1 مجال مغناطيسياً قيمته

$$\mathbf{B} = \frac{\boldsymbol{\mu_o N_1 I_1}}{\boldsymbol{l}} \ldots\ldots (\mathbf{15})$$

وفيضا في الملف الاول قيمته تساوي

$$\boldsymbol{\Phi_{11}} = \frac{\boldsymbol{\mu_o N_1^2 I_1}}{\boldsymbol{l}} \mathbf{A} \ldots\ldots (\mathbf{16})$$

كما يولد فيضا مغناطيسيا في الملف الثاني يساوي

$$\boldsymbol{\Phi_{12}} = \frac{\boldsymbol{\mu_o N_1 \; N_2 I_1}}{\boldsymbol{l}} \mathbf{A} \ldots\ldots (\mathbf{17})$$

ومن القيمتين للفيض ينتج

$$\mathbf{L_1} = \frac{\boldsymbol{\mu_o N_1^2}}{\boldsymbol{l}} \mathbf{A} \ldots\ldots (\mathbf{18})$$

$$\mathbf{M_{21}} = \frac{\boldsymbol{\mu_o N_1 N_2}}{\boldsymbol{l}} \mathbf{A} \ldots\ldots (\mathbf{19})$$

وبالمثل نحصل على ما يأتي اذا اخذنا التيار بنظر الاعتيار

$$\mathbf{L_2} = \frac{\boldsymbol{\mu_o N_2^2}}{\boldsymbol{l}} \mathbf{A} \ldots\ldots (\mathbf{20})$$

$$\mathbf{M_{12}} = \frac{\boldsymbol{\mu_o N_1 N_2}}{\boldsymbol{l}} \mathbf{A} \ldots\ldots (\mathbf{21})$$

وهذا اثبات لـ$\mathbf{M_{12}} = \mathbf{M_{21}}$

وبدمج معادلة (18) و(19) و(20) نحصل على:

$$\mathbf{M_{12}} = \sqrt{\mathbf{L_1 L_2}}$$

معادلات ماكسويل (Maxwell's Equation)

التصحيح لقانون امبير (The generalization of Ampere's law)

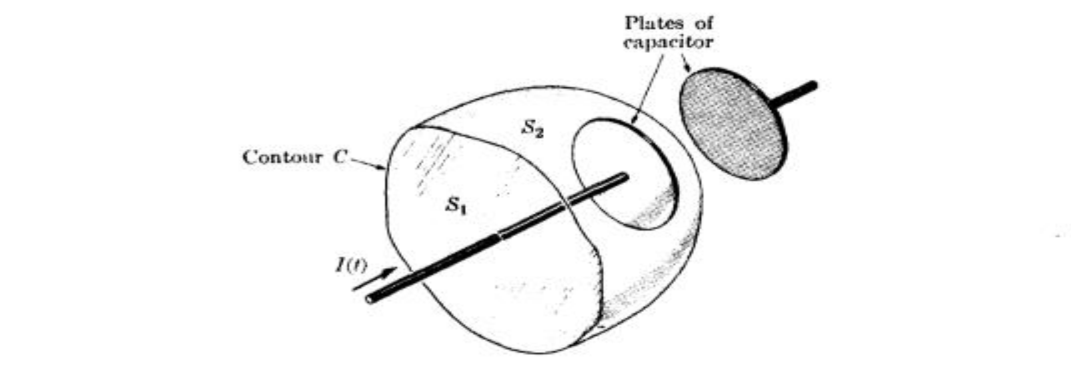
او تيار الازاحة (Displacement current)

وجدنا في الفصل السابق ان المجال المغناطيسي الناشيء عن توزيع التيار الكهربائي يحث قانون امبير للدائرة

$$\oint \vec{\mathbf{H}}.\,\mathbf{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \int_{\mathbf{s}} \vec{\mathbf{J}}\,.\,\hat{\mathbf{n}}\;\mathbf{da} \quad \ldots\ldots (\mathbf{22})$$

سنختبر الان هذا القانون ونبين فشله وسنحاول ايجاد صيغة عامة له.

افرض الدائرة المبينة في الشكل الاتي:



شكل 1-15 . يبين الشكل المنحني المغلق C والسطحين S_1 و S_2 لأختبار قانون الدائرة لأمبير .

التي والتي تتكون من متسعة صغير ذات الواح متوازية وقد تم شحنها بتيار كهربائي ثابت (بغض النظر عن منشأ هذا التيار) وبتطبيق انون امبير للمنحني المغلق c والسطح s_1 نجد:

$$\oint \vec{\mathbf{H}}.\,\mathbf{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \int_{\mathbf{s_1}} \vec{\mathbf{J}}\,.\,\hat{\mathbf{n}}\;\mathbf{da} = \mathbf{I} \ldots\ldots (\mathbf{23})$$

من ناحية اخرى اذا استخدمنا قانون امبير للمنحني المغلق c والسطح s_2 فان **J** يساوي صفرا لكافة السطح s_2 اي:

$$\oint \vec{\mathbf{H}}.\,\mathbf{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \int_{\mathbf{s_2}} \vec{\mathbf{J}}\,.\,\hat{\mathbf{n}}\;\mathbf{da} = \mathbf{0} \quad \ldots\ldots (\mathbf{24})$$

ان تناقض معادلة (23) و (24) احداهما الاخر فلا يمكن ان تكون كلتاهما صحيحتين.

ان التعديل المناسب الممكن اجراءه يكون من خلال ملاحظة ان المعادلتين (22) و (23) تعطيان نتائجاً مختلفة بسبب اختلاف التكاملات في الطرف الايمن منهما وباسلوب رياضي يمكننا ان نكتب الصيغة الاتية

$$\int_{\mathbf{s_2}} \vec{\mathbf{J}}\,.\,\hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{2}}\;\mathbf{da} - \int_{\mathbf{s_1}} \vec{\mathbf{J}}\,.\,\hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{1}}\;\mathbf{da} \neq \mathbf{0} \ldots\ldots (\mathbf{25})$$

السطحان $\mathbf{s_1}$ و $\mathbf{s_2}$ معا سطحا مغلقا (يلتقيان عند المنحني **C**) على ان $\hat{n}_2$ وحدة متجه مرسوم الى خارج السطح و $\hat{n}_1$ وحدة متجه مرسوم الى داخل السطح. فاذا اخذنا هذه الحقيقة بنظر الاعتبار فان المعادلة (25) تكتب بالشكل الاتي:

$$\int_{s_1+s_2} \vec{J}\,.\,\hat{n}\,da \neq 0 \;\ldots\ldots\,(26)$$

معادلة (26) صيغة تكاملية لنظرية التباعد فاذا استبدلنا $\vec{J}$ بالمتجه $\vec{J}'$ ذي تباعد قدره صفراً فانه من الواضح ان التكامل سيتلاشى ومن ثم سيزول التناقض بين المعادلتين (23) و (24) حيث:

$$\int_{s_1+s_2} \vec{J}'\,.\,\hat{n}\,da = \int_{v} \mathrm{div}\,\vec{J}'\,dv \;\ldots\ldots\,(27)$$

ان تلاشي تباعد المتجه $\vec{J}'$ يضمن تلاشي التكامل السطحي وهذا بدوره ان استبدال المتجه $\vec{J}$ بالمتجه $\vec{J}'$ في قانون امبير للدوائر الكهربائية سيكون مرضيا من وجهة نظر التناسث بين المعادلتين (22) و(23) وانه من الواجب التذكير ان تطبيق النص الاصلي لقانون امبير كان ناجحا في عدة حالات ومن ثم نكتب

$$\vec{J}' = \vec{J} + \boldsymbol{\alpha} \;\ldots\ldots\,(28)$$

حيث $\vec{\alpha}$ يمثل متجها ذا اهمية في المسائل التي تشتمل على المتسعات في حين لا يمثل اي اهمية في مسائل التوصيل. بالاضافة الى ان $\vec{\alpha}$ يجب ان يكون الحد اللازم لجعل المتجه متلاشياً وباخذ التباعد لمعادلة (28) وجعلها تساوي صفراً نجد ان:

$$\mathrm{div}\,\vec{J}' = \mathrm{div}\,\vec{J} + \mathrm{div}\,\vec{\alpha} \;\ldots\ldots\,(29)$$

وبالامكان استبدال المتجه $\vec{J}$ بالحد $-\frac{\partial\rho}{\partial t}$ اذ ان الصيغة التفاضلية لقانون حفظ الشحنة تقتضي الاتي:

$$\mathrm{div}\,\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

وبهذا فان

$$\mathrm{div}\,\vec{J}' = -\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{\alpha} \;\ldots\ldots\,(30)$$

ولكن الازاحة الكهربائية ترتبط بالعلاقة الاتية مع كثافة الشحنة

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho$$

وبجعل $\vec{\alpha}$ تساوي $\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ فان $\mathrm{div}\,\vec{J}' = 0$ وبتبني هذا الخيار يمكننا ان نكتب العلاقة

$$\vec{J}' = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \;\ldots\ldots\,(28)$$

والتي ستعطي الصيغة المعدلة لقانون امبير

$$\mathrm{curl}\,\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

ان ادخال الحد الثاني من الطرف الايمن الذي يطلق عليه تيار الازاحة يمثل احد اضافات ماكسويل الرئيسية للنظرية المغناطيسية.

الصيغ التفاضلية لمعادلات ماكسويل

الصيغة المعدلة لقانون امبير $\text{curl}\,\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

قانون فارادي $\text{curl}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

قانون كاوس في الكهربائية $\text{div}\,\vec{D} = \rho$

قانون كاوس في المغناطيسية $\text{div}\,\vec{B} = 0$

ملاحظة: $\vec{D} = \varepsilon_o \vec{E}$ لذلك يمكن كتابة قانون كاوس في الكهربائية بالشكل الاتي $\text{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o}$

الصيغ التكاملية لمعادلات ماكسويل

الصيغة المعدلة لقانون امبير $\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = \vec{I} + \int_s \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{a}$

قانون فارادي $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{a}$

قانون كاوس في الكهربائية $\oint_s \vec{D}\cdot d\vec{a} = \int_v \rho\, dv$

قانون كاوس في المغناطيسية $\oint_s \vec{B}\cdot d\vec{a} = 0$

الصيغ التفاضلية لمعادلات ماكسويل في الفضاء الحر (free space)

الصيغة المعدلة لقانون امبير $\text{curl}\,\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

قانون فارادي $\text{curl}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

قانون كاوس في الكهربائية $\text{div}\,\vec{D} = 0$

قانون كاوس في المغناطيسية $\text{div}\,\vec{B} = 0$

الصيغ التكاملية لمعادلات ماكسويل في الفضاء الحر (free space)

الصيغة المعدلة لقانون امبير $\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_s \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{a}$

قانون فارادي $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{a}$

قانون كاوس في الكهربائية $\oint_s \vec{D}\cdot d\vec{a} = 0$

قانون كاوس في المغناطيسية $\oint_s \vec{B}\cdot d\vec{a} = 0$

ملاحظات عن ملخص مادة الكهرومغناطيسية: 1- وضعت هذا الملخصات لتبسيط ومعرفة مادة الفصل وليس شامل للفصل 2- غير مسؤول عن الخطأ او النقص 3- الرمز → او⇀ هي تعبر عن متجه. 4- جميع الامثلة ليست محلولة وحلها موجود في الملازم وكذلك الواجبات البيتية.