Electromagnetic Theory 1

Chapter 3

Sara J.Abuzayed

Chapter Three
Special Techniques for Calculating Potentials

أهلاً وسهلاً في الشابتر الجديد ونبدأ بالبسملة لدراسة السكند ^^

⇐ إذا كان عندنا توزيع شحنات ساكن ($\rho(r)$) يمكننا حساب المجال الكهربائي الناشئ عنها

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\Delta\hat{r}}{(\Delta r)^2} \rho(\vec{r}') \, d\tau'$$

$\Delta\vec{r} = \vec{r}' - \vec{r}$ (البعد بين الشحنات والنقطة التي بدنا نقيس عندها E)

هذا التكامل يحوي متجه يجب علينا مكاملته وبشكل عام صعب حسابه.

في معظم الحالات من الأسهل حساب الجهد الكهربائي أولاً V والذي يعرف على أنه :

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{1}{\Delta r} \rho(\vec{r}') \, d\tau'$$

لأن المكامل كمية قياسية . والمجال الكهربائي $\vec{E}$ المقترن بهذا الجهد يمكننا إيجاده بأخذ الـ (gradiant) .

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

الجهد الكهربائي غالباً سهل الإيجاد لتوزيع شحنات بسيط ، بالإضافة إلى ذلك ، في معظم مسائل الكهرباء السكونية ، تكون الموصلات داخلة بالموضوع و توزيع الشحنات ρ ليس معروفاً في بداية المسألة (فقط الشحنة الكلية على كل موصل معروفة).

هناك طريقة أفضل لتحديد الجهد الكهربائي هو بالبدأ مع معادلة (Poisson's)

$$\nabla^2 V = \frac{-\rho}{\varepsilon_0}$$

في معظم الحالات نريد فقط إيجاد الجهد في منطقة ليس فيها كثافة شحنة ($\rho = 0$).

في هذه الحالة تصبح المعادلة هي معادلة لابلاس

$$\nabla^2 V = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

هناك عدد لانهائي من الاقترانات التي تحقق معادلة لابلاس والاقتران المناسب يتم اختياره بناءً على Boundary Conditions

هاد الشابتر راح يركز على طرق متنوعة يمكن استخدامها في حل معادلة لابلاس وإيجاد الاقتران المناسب الذي يتوافق مع BCs.

Solutions of Laplace's Eq. in One, Two & 3D.

معادلة لابلاس في بعد واحد :

في بعد واحد يكون الجهد V يعتمد على متغير واحد فقط (x) . الجهد الكهربائي $V(x)$ هو حل لمعادلة لابلاس في بعد واحد

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 0$$

والحل العام لهذه المعادلة هو

$$\boxed{V(x) = sx + b}$$

s, b : ثوابت

s, b ثابتين عشوائيين لكن يتم تحديدهم إذا تم تخصيص/تحديد قيمة $V(x)$ عند نقطتين مختلفتين.

Exp) Consider a one-dimensional world with Two point Conductors Located at $x = 0$ m & $x = 10$ m. The conductor at $x = 0$ m is grounded ($V = 0$ volt) & the conductor at $x = 10$m is kept at a constant potential of $200V$. Determine V.

BCs $\quad V(0) = 0 = s(0) + b$

$$0 = b$$

$$V(10) = 10s + b = 200V$$

$$10s = 200$$

$$s = 20$$

$$\Rightarrow V(x) = 20x$$

$$E = \frac{-dV(x)}{dx} = -20\ V/m$$

الـ (BCs) اللي استخدمناهم حدودي الجهد في المنطقة الواقعة بين $x=0$ و $x=10$ وليس خارج هذه المنطقة.

هلا، إذا كان $V(x)$ اللي أوجدناه صحيح لكل (x) معناته لما x تروح لـ ∞ الجهد راح يروح لـ ∞.

هاد معناته انه الـ BCs بتحددلي الاقتران المناسب لمعادلة لابلاس من بين العدد اللانهائي اللي ممكن يحققها بشكل عام مثل ما حكينا قبل بس برضو بحددلي المنطقة اللي هاد الحكي فيها صحيح.

يعني في المثال السابق قدرت أختار الاقتران $V(x)=20x$ من بين جميع الاقترانات كثيرات الحدود من الدرجة الأولى اللي كانوا على شكل $sx+b$ ولكن فقط في المنطقة الواقعة بين $x=$ صفر و $x = 10$ م، وليس لكل الـ (Space).

هلا خلينا نحكي شوي عن بعض الخصائص العامة للاقترانات التي تحقق معادلة لابلاس في بعد واحد.

الخاصية الأولى:

$V(x)$ هو معدل $V(x+R)$ و $V(x-R)$ لكل R مادام $x+R$ و $x-R$ موجودين في Region.

يعني لو أخذت عينت أي نقطة في الـ (Region) المسموحة وأخذت حوالين هاي النقطة Interval.

$$I = [x-R , x+R]$$

أو يعني $I = [x - \Delta x , x + \Delta x]$ فقيمة $V(x)$ هي معدل الجهود لكل النقط في هاي الـ (Interval).

والإثبات بسيط

$$\frac{V(x+R) + V(x-R)}{2} = \frac{S(x+R)+b + S(x-R)+b}{2}$$

$$= \frac{Sx + SR + b + Sx - SR + b}{2}$$

$$= \frac{2Sx + 2b}{2} = Sx + b$$

$$= V(x).$$

هذه الخاصية تزودنا بأسلوب تحليلي يمكننا من خلاله إيجاد الجهد الذي يحقق معادلة لابلاس. فإذا كنا نعرف الجهد عند النقطة a $(V(x=a) = V_a)$ وكنا نعرف الجهد عند b $(V(x=b) = V_b)$ نستطيع إيجاد الجهد عند النقطة $\frac{a+b}{2}$

$$V\left(x = \frac{a+b}{2}\right) = \frac{V_a + V_b}{2}$$

بعدها يمكننا تحديد قيمة الجهد عند النقطة $x = \frac{3a+b}{4}$

$$V\left(\frac{3a+b}{4}\right) = \frac{1}{2}\left[V_a + V\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}V_a + \frac{1}{2}V_b\right]$$

وعند النقطة $x = \frac{a+3b}{2}$ لأنه هاي النقطة عبارة عن $\left(\frac{a+b}{2}\right) + b$

$$V\left(\frac{a+3b}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[V(b) + V\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$$

وبتكرار هذه الخطوات يمكننا إيجاد الجهد عند جميع النقاط الواقعة بين a ، b لكن ليس خارج هذه المنطقة.

الخاصية الثانية:

حل معادلة لابلاس لا يمكن أن يكون لديه قيمة قصوى محلية (max أو min) هذه القيم فقط على الـ (Boundaries).
وهذه الخاصية تأتي من الخاصية الأولى، لأنه لو كان في قيم قصوى داخل المنطقة فإنها لن تكون معدل لنقطتين آخرتين يعني مثلاً لو كانت النقطة $\frac{a+b}{2}$ هي نقطة يكون عندها الاقتران max كيف راح هي الـ Avg. لقيمة الجهد عند a ، وعند b.

وهاي الخاصية مهمة كتير ⇐ الجسيم المشحون لا يمكن وضعه في Stable equilibrium بالكهرباء السكونية وحدها (Earnshaw's Theo.)

الجسيم يكون في (Stable equilibrium) إذا تم وضعه في مكان يكون فيه الجهد minimum يعني أقل قيمة للجهد لازم تكون عند موقع الجسيم.
أي انزياح صغير عن هاد الموقع بيرفع قيمة الجهد ويولد قوة بتعمل على إعادة الجسيم إلى موقع الاتزان (equilibrium).

لكن لأنه ليس هنالك أي local max أو Local min (قيم قصوى محلية) ⇐ الجسيم لا يمكن أن يكون في اتزان مستقر بواسطة القوة الكهربائية فقط.

Laplace Equation in Two Dimensions

في بعدين ، الجهد الكهربائي يعتمد على متغيرين x و y.

تصبح معادلة Laplace

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

This equation does not have a simple Analytical Solution as the one-dimensional Laplace equation does.

However, the properties of solutions of the one-dimensional Laplace Equation are also valid for Solutions of the the two-dimensional Laplace Eq.

بعرف انكم نطيعوا عن الانجليزي بس اقرأوهم عشان يتقوى الانجليزي عندكم ^^.

المهم خلاصة الكلام اللي فوق انه حل معادلة لابلاس في بعدين مش بهالسهولة إيجاده مثل بعد واحد ولكن خصائص الحل في بعد واحد تنطبق أيضاً على ~~xxxx~~ الحل في بعد واحد.

الخاصية الأولى :

قيمة V عند النقطة (x, y) تساوي معدل قيم V حول هذه النقطة

$$V(x,y) = \frac{1}{2\pi R} \oint_{circle} V R \, d\varphi$$

مسار التكامل هو دائرة مركزها النقطة (x,y) ونصف قطرها R.

الخاصية الثانية :

V ليس له قيم قصوى ، كل القيم القصوى ع الأطراف فقط يعني على (Boundaries)

Laplace Equation in Three Dimensions

في الثلاثة أبعاد الجهد الكهربائي يعتمد على ٣ متغيرات x ، y و z . تصبح معادلة لابلاس

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

هاي المعادلة كمان إيجاد حلها أصعب من بعد واحد بلكن خصائص الحل نفسها .

الخاصية الأولى :

قيمة الجهد عند النقطة (x, y, z) تساوي معدل قيم الجهد حول هذه النقطة .

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi R^2} \oiint_{\text{Sphere}} V R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

حيث أن ال (Surface Integral) يكون ع سطح كرة مركزها النقطة (x, y, z) ونصف قطرها R .

ولإثبات هذه الخاصية ، اعتبر انه عندك شحنة q على Z-axis تبعد مسافة r عن مركز كرة نق = R .

الجهد الكهربائي V عند النقطة P الناشئ عن q يساوي

$$\boxed{V_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{d}}$$

d : المسافة بين P ، q .

باستخدام قانون جيب التمام (cosine Rule) يمكننا التعبير عن d بدلالة r ، R ، θ

$$d^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta$$

يصبح الجهد عند P يساوي

$$V_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{r^2+R^2-2rR\cos\theta}}$$

ومعدل الجهد على سطح الكرة يمكن إيجاده بمكاملة V_p على سطح الكرة

$$V_{avg} = \frac{1}{4\pi R^2}\iint_{\text{Sphere}} V_p R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \frac{R^2}{4\pi R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{r^2+R^2-2rR\cos\theta}}\sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

let $u = \sqrt{r^2+R^2-2rR\cos\theta}$

$\frac{du}{d\theta} = 2rR\sin\theta \, d\theta$

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(2\pi)\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta \, d\theta}{\sqrt{r^2+R^2-2rR\cos\theta}}$$

$$= \frac{q}{8\pi\varepsilon_0}\left.\frac{\sqrt{r^2+R^2-2rR\cos\theta}}{rR}\right|_0^{\pi}$$

$$= \frac{q}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r+R}{rR} - \frac{r-R}{rR}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

وهذا يساوي الجهد الناشئ من الشحنة q عند مركز الكرة. وإذا استخدمنا (principle of superpositions) يصبح من السهل إثبات انه المعدل للجهود الناشئة عن مجموعة شحنات يساوي محصلة الجهود الناشئة عند المركز تبع الكرة.

الخاصية الثانية :

The electrostatic potential V has no Local max. or min. All extrems occur at the boundaries.

Exp) Pb 3.3 Find the general Solution To Laplace's equation in spherical coordinates, for the case where V depends only on r. Then do the same for Cylindrical Coordinates.

Laplace Equation in spherical coordinates is given by

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}=0$$

وفي السؤال حاكيلنا انه V يعتمد فقط على R.

$$\frac{\partial V}{\partial\theta}=0 \quad \& \quad \frac{\partial V}{\partial\varphi}=0$$

تصبح معادلة لابلاس

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)=0$$

$$r^2\frac{\partial V}{\partial r}=\text{constant}=a$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{a}{r^2}$$

نتكامل بالنسبة لـ(r).

$$\boxed{V(r) = \frac{-a}{r^2}}$$

Laplace's Equation in cylindrical coordinates

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

V يعتمد فقط على r.

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \qquad \& \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

تصبح المعادلة

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0$$

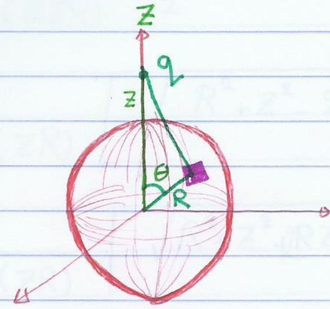
$$r\frac{\partial V}{\partial r} = \text{const.} = a$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{a}{r}$$

$$V = \int \frac{a}{r}\, dr = a\ln(r) + b$$

$$\boxed{V(r) = a\ln(r) + b}$$

Potentials



حساب متوسط الجهد على سطح كرة
نصف قطرها R

$$V_{avg}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_{sphere} V\,da$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

$$\vec{r}^{\,2} = R^2 + Z^2 - 2RZ\cos\theta$$

$$V_{avg} = \frac{1}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{4\pi \cancel{R^2}} \frac{q\cancel{R^2}}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{R^2+Z^2-2RZ\cos\theta}}$$

$$= \frac{1}{\underset{2}{\cancel{4\pi}}} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(\cancel{2\pi})}{RZ} \int_0^{\pi} \frac{2RZ\ \sin\theta\, d\theta}{2\sqrt{R^2+Z^2-2RZ\cos\theta}}$$

$$= \frac{q}{2RZ(4\pi\varepsilon_0)} \int u^{-1/2}\, du$$

$$= \frac{q}{(\cancel{2})4\pi\varepsilon_0(\cancel{2}ZR)} \frac{\cancel{2}}{2} u^{1/2}$$

$$= \frac{q}{(\cancel{2})4\pi\varepsilon_0(ZR)} \left[\sqrt{R^2+Z^2-2ZR\cos\theta} \right]_{\theta=0}^{\pi}$$

(2)

$$= \frac{q}{(2)4\pi\varepsilon_0(ZR)} \left[\sqrt{R^2+Z^2+2RZ} - \sqrt{R^2+Z^2-2RZ} \right]$$

$$= \frac{q}{(2)4\pi\varepsilon_0(ZR)} \left[R+Z-(Z-R) \right]$$

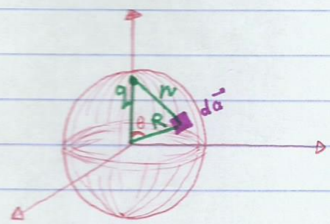
$$= \frac{q}{(\cancel{2})4\pi\varepsilon_0(Z\cancel{R})} \left[\cancel{2}\cancel{R} \right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 Z}$$ [The potential due to q at the centre of sphere.]

Q3.1) Find the average potential over a spherical surface of radius R due to a point charge located inside. Show that in general

$$V_{avg} = V_{centre} + \frac{Q_{enc}}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

V_{centre}: potential at the centre due to all external charges.



$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

$$r = R^2 + Z^2 - 2RZ\cos\theta$$

$$V_{avg} = \frac{1}{4\pi R^2}\int V\,da$$

$$= \frac{1}{4\pi R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi}{\sqrt{R^2+Z^2-2ZR\cos\theta}}$$

$$= \frac{1}{4\pi \cancel{R^2}}\frac{qR^{\cancel{2}}}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{R^2+Z^2-2ZR\cos\theta}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\cancel{4\pi}_{2}}(\cancel{2\pi})\int_0^{\pi}\frac{2ZR\sin\theta\,d\theta}{2ZR\sqrt{R^2+Z^2-2ZR\cos\theta}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{2ZR}\left[\sqrt{R^2+Z^2-2ZR\cos\theta}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{2ZR}\left[(R^2+Z^2+2ZR)^{1/2} - (R^2+Z^2-2ZR)^{1/2}\right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{2RZ} \left[R + Z - (R - Z) \right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R}$$

If there are more than one charge inside sphere

$$V = \frac{Q_{enc}}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

The average due to exterior charges in V_{centre}.

So, $V_{avg} = V_{centre} + \frac{Q_{enc}}{4\pi\varepsilon_0}$

Q3) Find the general solution to Laplace's equation in spherical coordinates, for the case where V depends only on r. Do the same for cylindrical coordinates, assuming V depends only on S.

$$\nabla^2 V = 0$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dV}{dr}\right) = 0$$

$$r^2 \frac{dV}{dr} = \text{constant} = C$$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{c}{r^2}$$

$$V = -\frac{c}{r} + K$$

[the potential of a uniformly charged sphere.

$$\nabla^2 V = \frac{1}{s}\frac{d}{ds}\left(s\frac{dV}{ds}\right) = 0$$

$$s\frac{dV}{ds} = \text{constant} = c$$

$$\frac{dV}{ds} = \frac{c}{s} \Rightarrow V = c\ln(s) + K$$

Exp) Find the general solution to Laplace's equation in spherical coordinate, for the case where V depends only on r.

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV}{dr}\right)=0$$

$$r^2\frac{dV}{dr}=C$$

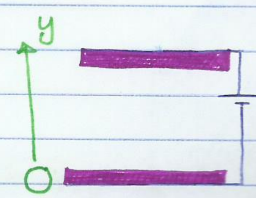
$$\frac{dV}{dr}=\frac{c_1}{r^2} \Rightarrow V=c_2-\frac{c_1}{r}$$

It's ~~Similal~~ Similar to the problem of capacitor of two concentric spherical shells.

Exp) The two plates of a parallel-plate capacitor are separated by a distance d maintained at potentials 0 & V_0. Assuming negligible fringing effects at the edges, determine (a) the potential
(b) the surface charg densities.

(a) $\frac{d^2V}{dy^2}=0 \longrightarrow V=\frac{V_0}{d}y$

$$\boxed{\vec{E}=-\frac{dV}{dy}=-\frac{V_0}{d}\hat{y}}$$



(b) $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$, $E_{outside}=0 \Rightarrow \sigma=\varepsilon_0\left[0-\left(-\frac{V_0}{d}\right)\right]$

$$=\frac{\varepsilon_0 V_0}{d}$$

Exp) Determine the $\vec{E}$ field both inside and outside a spherical cloud of electron with a uniform volume charge density $-\rho_0$ for $0 \leq R \leq b$ and $\rho = 0$ for $R > b$ by solving Poisson's & laplace's equation for V.

$$\nabla^2 V = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left(R^2 \frac{dV}{dR}\right) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{d}{dR}\left(R^2 \frac{dV}{dR}\right) = \frac{\rho_0 R^2}{\varepsilon_0}$$

$$\int d\left(R^2 \frac{dV}{dR}\right) = \int \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} R^2 \, dR$$

$$R^2 \frac{dV}{dR} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} R^3 + C$$

$$\frac{dV}{dR} = \frac{\rho_0 R}{3\varepsilon_0} + \frac{C}{R^2}$$

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dR}\hat{R}$$ (can't be infinite at $R = 0$ so $C = 0$)

$$\vec{E} = -\frac{\rho_0 R}{3\varepsilon_0}\hat{R}$$

outside the sphere

$$\nabla^2 V = 0$$

$$\frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left(R^2 \frac{dV}{dR}\right) = 0$$

$$R^2 \frac{dV}{dR} = \text{constant} = C$$

$$\frac{dV}{dR} = \frac{C}{R^2}$$

$\cancel{V=}$

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dR} = -\frac{C}{R^2}\,\hat{R}$$

(The continuty of electric field at $R = b$

$\Rightarrow \frac{C}{b^2} = \frac{\rho_0 b}{3\varepsilon_0}$

$C = \frac{\rho_0 b^3}{3\varepsilon_0}$)

$$\vec{E} = -\frac{\rho_0 b^3}{3\varepsilon_0 R^2}\,\hat{R}$$

The symmetry of the space will determine the function that you use to solve the problem.

Uniqueness Theorems

هون بدنا نحكي عن نظريتين بحكوا عن وحدانية الحل لمعادلة لابلاس يعني الحل راح يكون وحيد ومستحيل يكون في أكثر من حل بحقق معادلة لابلاس و ال BCs .

هاد الاشي راح يفيدنا كثير خاصة في السكشن القادم لأنه الفكرة الأساسية في السكشن القادم قائمة على فرض تصورات غير معطاة وغير موجودة ولكننا توصلنا لحل المعادلة وإيجاد الجهد وبما أنه قدرنا نحصل على الجهد فالشكل اللي وصلناله من الحل هو الصحيح ولا يوجد شكل آخر لاقتران الجهد الذي يحقق معادلة لابلاس و الـ BCs .

first uniqueness Theorem

افرض انه عندك حجم معين لا يحتوي كثافة شحنة $(\rho = 0)$.
وافرض انه قيمة الجهد الكهربائي محددة عند كل نقطة على سطح هاد الحجم

النظرية هاي بتحكيلنا انه حل معادلة لابلاس للحالة اللي أخدناها فوق يتم تحديده بشكل فريد (unique) .

يعني الحالة اللي فوق بتحكي انه أنا بعرف قيمة الجهد عند كل نقطة على السطح فاقتران الجهد إذا لقيته شكل بحقق المعلومات اللي عندي راح يكون هو الحل وما في غيره .

ولإثبات هذه النظرية ، خلينا نشوف لو كان عنا حلين شو راح يصير.

$$\vec{\nabla}^2 V_1 = 0$$

$$\nabla^2 V_2 = 0$$

ولأنه V_1 و V_2 حلين لمعادلة لابلاس فراح يكون الهم نفس BCs.

يعني $V_1 = V_2$ عند الـ (Boundaries).

هلا اعتبر انه في حل ثالث V_3 بساوي

$$V_3 = V_2 - V_1$$

$$\nabla^2 V_3 = \nabla^2 V_2 - \nabla^2 V_1 = 0$$

قيمة V_3 ع الـ (boundries) تساوي صفر لأنه $V_2 = V_1$ هناك.

لكن إذا بتتذكروا الخاصية الثانية للحل وهي انه الحل ما في اله قيم قصوى في المنطقة وانه كل القيم القصوى بتكون ع boundaries.

وبما انه V_3 هو حل لمعادلة لابلاس زي ما فرضناه فوق وقيمته بتساوي صفر وين ما كان ع boundaries ← بصير max و min للاقتران أيضا صفر معناته انه V_3 أصلاً صفر وين ما كان.

$$V_3 = V_2 - V_1 = 0$$

$$\boxed{V_2 = V_1} \quad \text{everywhere}$$

معناته مستحيل يكون في حلين مختلفين لمعادلة لابلاس بحققوا نفس BCs.

إذن 6 حل معادلة لابلاس يمكن تحديده بشكل فريد (unique) إذا حددنا قيمة الجهد عل كل الـ (Boundaries) تبعت المنطقة.

هنا أيضاً يلفت انتباهنا إلى أنه ما بفرق كيف جبت الحل، إذا أولاً كان يحقق معادلة لابلاس وثانياً قيمة الحل تطابق القيم عند BCs ⇐ إذن الحل صحيح وهو الحل الوحيد اللي كنا ندور عليه.

⇐ هلا هاي النظرية يمكن تطبيق ما تقوله فقط في المناطق الخالية من الشحنات وقيمة الجهد عل حدودها (Boundaries) معروفة (مش ضروري يكون الجهد ثابت) المهم يكون معروف.

في المختبر 6 تكون الـ (Boundaries) عادةً موصلات (conductors) موصوله مع بطاريات عشان تخليها عل الجهد ثابت.

في العديد من المسائل لا نعرف قيمة الجهد عل الـ (Boundaries) تبعت الـ (system) اللي بندرسه.

بالمقابل ممكن نكون نعرف كمية الشحنة الكلية عل الموصلات اللي بتكون هاد النظام (system) اللي بندرسه.

(بدنا ننتبه لشغلة انه معرفة Q_{tot} لا تعني معرفة كيف تتوزع عل الموصل يعني ρ).

بالإضافة لوجود الموصلات المكونة للنظام ممكن يكون في توزيع من الشحنات ρ تملأ المنطقة الواقعة بين هذه الموصلات.

لهذا النوع من الأنظمة النظرية الأولى لا تنطبق.

SaRa 2019

Be Happy

SaRa Jamal

فبنحتاج لنظرية أخرى وهي النظرية الثانية لوحدانية الحل

Second Uniqueness Theorem

هذه النظرية تنص على أن المجال الكهربائي $\vec{E}$ يمكن تحديده بشكل فريد (unique) إذا عرفنا الشحنة الكلية Q على كل موصل وكنا كمان نعرف ρ (كثافة الشحنة/كيفية توزيع الشحنات) في المنطقة الواقعة بين الموصلات.

ولإثبات هذه النظرية راح نستخدم نفس الطريقة اللي أثبتنا فيها الأولى.

اعتبر انه عندك مجالين $\vec{E_1}$ و $\vec{E_2}$ بحققوا معادلة Poisson في المنطقة الواقعة بين الموصلات، إذن

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E_1} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E_2} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

وإذا عملنا Surface Integral للمجال الكهربائي على سطح أحد الموصلات الذي يحمل شحنة مقدارها Q_i

$$\iint_{\substack{\text{Surface}(i)\\ \text{Conductor}}} \vec{E_1}\cdot d\vec{a} = \frac{Q_i}{\varepsilon_0}$$

$$\iint_{\substack{\text{Surface}(i)\\ \text{Cond.}}} \vec{E_2}\cdot d\vec{a} = \frac{Q_i}{\varepsilon_0}$$

SaRa physics 2019

والفرق بين E_1 و E_2 يحقق المعادله التالية ($E_3 = E_1 - E_2$)

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = \vec{\nabla} E_1 - \vec{\nabla} E_2$$

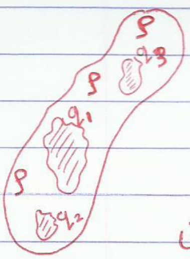
$$= \frac{\rho}{\varepsilon_0} - \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \text{Zero}$$

SaRa
Physics
2019

$$\underset{\substack{\text{surface}\\ \text{Conductor } i}}{\iint} \vec{E}_3 \cdot d\vec{a} = \iint \vec{E}_1 \cdot d\vec{a} - \iint \vec{E}_2 \cdot d\vec{a}$$

$$= \frac{Q_i}{\varepsilon_0} - \frac{Q_i}{\varepsilon_0}$$

$$= 0$$



افرض انك عملت (surface Integral) لـ $\vec{E}_3$ على كل الأسطح (أسطح الموصلات مع السطح الخارجي).

ولأن الجهد الكهربائي على سطح أي موصل يكون ثابتاً إذن الجهد الكهربائي الخاص بكل من E_1 و E_2 يجب أن يكون ثابتاً أيضاً على سطح كل موصل.

إذن $V_3 = V_1 - V_2$ راح يكون كمان ثابت على سطح كل موصل.

الـ (surface Integral) لـ $V_3 \vec{E}_3$ على سطح الموصل i يمكن كتابته كالتالي

$$\underset{\text{surface}}{\iint} V_3 \vec{E}_3 \cdot d\vec{a} = V_3 \underset{\text{surf.}}{\iint} \vec{E}_3 \cdot d\vec{a}$$

$$= 0$$

إذن تكامل $V_3 \vec{E}_3$ على سطح جميع الموصلات يساوي صفر وعلى السطح الخارجي كمان راح يكون صفر لأنه $(V_3 = 0)$ على هذا السطح.

$$\iint_{\text{All surfaces}} V_3 \vec{E}_3 \cdot d\vec{a} = 0$$

يمكن كتابة هذا التكامل باستخدام متطابقة جرين (Green's Identity)

$$0 = \iint_{\text{All surf.}} V_3 \vec{E}_3 \cdot d\vec{a} = -\iint_{\text{All surf.}} V_3 \vec{\nabla} V_3 \cdot d\vec{a}$$

$$= -\iiint_{\substack{\text{Volume}\\ \text{between}\\ \text{conductors}}} \left[V_3 \vec{\nabla}^2 V_3 + (\vec{\nabla} V_3) \cdot (\vec{\nabla} V_3) \right] d\tau$$

$$= -\iiint \left[-V_3 (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_3) + \vec{E}_3 \cdot \vec{E}_3 \right] d\tau$$

$$= -\iiint E_3^2 \, d\tau = \text{Zero}$$

$$\Rightarrow E_3 = 0$$

$$\Rightarrow E_3 = E_1 - E_2 = 0$$

$$E_1 = E_2$$

SaRa
Physics
2019

وهذا مايثبت النظرية الثانية.

Method of Images ②

هاد السكشن مهم جداً ، لأنه بقوم على فكرة إنك تفرض أشياء زيادة في المسألة لحتى تقدر تحصل على الحل وبعدها بس تتأكد انه بزبط على BCs بتحكي انه هاد الحل الصحيح والوحيد بناءً على النظريتين اللي أثبتناهم قبل شوي .

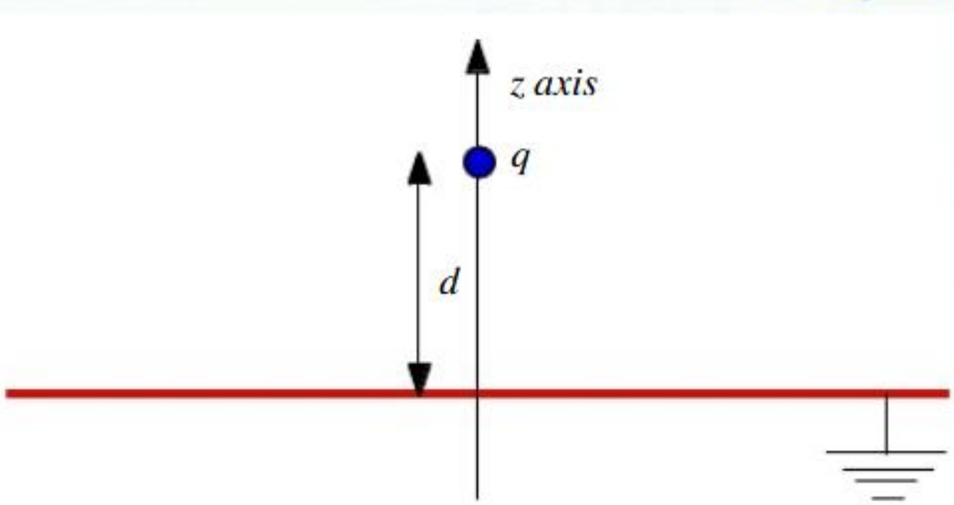
خلينا نلش بمسألة سهلة لنوضح شو المقصد .

افرض انه عندك شحنة مقدارها q موضوعة على مسافة d فوق صفيحة لانهائية مصنوعة من موصل وموصولة مع الأرض (Infinite grounded conducting plane) .

الجهد الكهربائي لهاد النظام لازم يحقق الـ BCs التالية

$$V(x, y, 0) = 0$$

$$V(x,y,z) \longrightarrow 0 \quad \text{when} \quad \begin{cases} x \longrightarrow \infty \\ y \longrightarrow \infty \\ z \longrightarrow \infty \end{cases}$$



هلا الحساب المباشر للجهد مش ممكن أعمله لأنه ما بعرف كيف الشحنات بتتوزع ع الموصل الموصول بالأرضي .

ملاحظة : مش ضروري يكون توزيع الشحنات P ع سطح الموصل الموصول مع الأرضي تكون صفر.

طيب كيف بدنا نحلها هاي ؟

خلونا نتخيل انه عنا نظام ثاني مكون من شحنتين نقطيتين $+q$ و $-q$ موضوعتين ع مسافة $z=d$ و $z=-d$ بالتتابع .

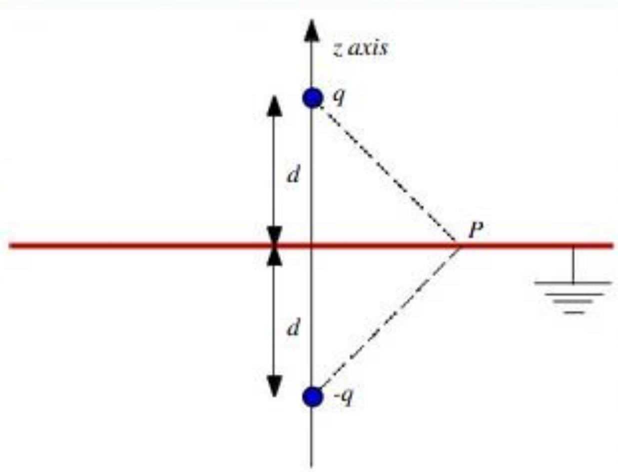
الجهد الكهربائي الناشئ عن هاتين الشحنتين يمكن حسابه عند أي نقطة في الـ (space) .

خلينا ناخد النقطة $P(x, y, 0)$ اللي راح تكون ع xy plane

الجهد الكهربائي عندها راح يكون

$$V(x, y, 0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{-q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+d^2}} + \frac{-q}{\sqrt{x^2+y^2+d^2}}\right]$$



الجهد الناشئ عن هذا النظام راح يؤول للصفر عند ∞ لأنه الجهد الناشئ عن كل شحنة يقل بمقدار يتناسب مع $\frac{1}{r}$.

إذن الجهد الكهربائي الناشئ عن هاتين الشحنتين يحقق الـ BCs تبعت المسألة الأصلية.

وبما أنه توزيع الشحنات في المنطقة الواقعة فوق xy-plane (Z>0) متطابق في كل من النظامين (الأصلي واللي احنا فرضناه) ممكن نستفيد من شكل $V(x,y,0)$ لإيجاد $V(x,y,z)$ الذي يحقق الـ BCs والمعادلة.

افرض انه عند نقطة في المنطقة (Z>0) راح يكون الجهد عندها

$$V(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} + \frac{-q}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}}\right]$$

هاد الحل يحقق معادلة Poissons ويحقق الـ BCs إذن هو الحل الصحيح والوحيد (بناءً على نظرية وحدانية الحل).

This technique of using image charges to obtain the electrostatic potential in some region of space is called "Method of Images".

الجهد الكهربائي ممكن نستخدمه لحساب توزيع الشحنات على الموصل الموصول مع الأرضي. هلا لأنه المجال الكهربائي ($\vec{E}$) داخل الموصل يساوي صفر إذن الـ BCs تبعت E اللي حكينا عنها في شابتر 2 بتفرجينا انه المجال على السطح الخارجي للموصل يساوي

$$\vec{E}_{out} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{k}$$

لو كتبنا $\vec{E}$ بدلالة V يمكننا إعادة كتابة المعادلة السابقة

$$\sigma = \varepsilon_0 \vec{E}_z$$

$$\sigma = -\varepsilon_0 \left.\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{z=0}$$

لو اشتقينا V وعوضناه

$$\sigma = \frac{-q}{4\pi}\left[\frac{-(z-d)}{(x^2+y^2+(z-d)^2)^{3/2}} + \frac{(z+d)}{(x^2+y^2+(z+d)^2)^{3/2}}\right]_{z=0}$$

$$= \frac{-q}{2\pi}\,\frac{d}{(x^2+y^2+d^2)^{3/2}}$$

نعوض z = صفر
فقط بآخر خطوة.

نقدر نوجد الشحنة الكلية Q_{tot}

$$Q_{tot} = \iint_{surface} \sigma\, da = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \sigma(r)\, r\, dr\, d\theta$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$Q_{tot} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{-qd}{2\pi(r^2+d^2)^{3/2}}\, r\, dr$$

$$= -qd \int_0^{\infty} (r^2+d^2)^{-3/2}\, r\, dr$$

$$= \left.\frac{qd}{\sqrt{r^2+d^2}}\right|_0^{\infty} = qd\left[0 - \frac{1}{d}\right] = -q.$$

Try To Be Happy ^ ^

SaRa Physics

زي ما احنا شايفين انه الشحنة المستحثة عالموصل سالبة معناته راح يصير في تجاذب بين الموصل والشحنة q اللي موضوعة على مسافة d.

هلا بما أنه كان الجهد الكهربائي الناشئ عن النظام الثاني اللي فرضناه هو نفسه الجهد الكهربائي تبع نظامنا في المنطقة الواقعة فوق xy-plane $(Z>0)$ راح يكون أيضاً المجال الكهربائي $\vec{E}$ نفسه في كل من النظامين.

فالقوة المؤثرة عالشحنة $+q$ ممكن أوجدها مباشرة بحساب القوة التي تؤثر بها الشحنة الصورة (image charge) واللي كان مقدارها $-q$.

$$\boxed{\vec{F} = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{(2d)^2} \hat{k}}$$

لكن هناك فرق مهم بين النظامين وهو في الطاقة الكهربائية الكلية للنظام.

المجال الكهربائي في الـ (image-charge system) موجود في كل مكان ومقداره راح يكون عند (x, y, z) نفسه عند $(x, y, -z)$

لكن في النظام الأصلي فقط المجال راح يكون في المنطقة $(Z>0)$

معناته راح تكون طاقة النظام الأصلي $= \frac{1}{2}$ طاقة (image-charge sys.)

$$W_{img} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{2d}$$

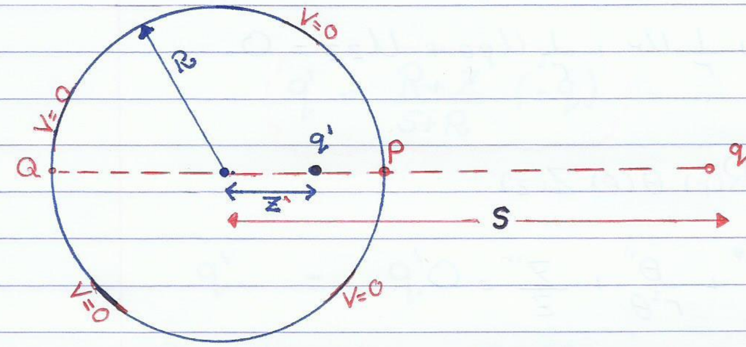
$$W_{real} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{2d}\right)$$

SaRa Jamal 2019

Exp 3.2 , Pb 3.7)

A point charge q is situated a distance s from the centre of a grounded conducting sphere of radius R.

(a) Find the potential everywhere.



SaRa Physics

عشان نحل المسألة بدنا نفرض عنا شحنة مقدارها q' على بعد z' من المركز واللي بتخلي الجهد على السطح تبع الكرة يساوي صفر.

إذن راح نبلش بتحديد الموقع الصحيح للشحنة q'.

لو فرضنا انه عندي النقطة P على سطح الكرة وتقع على الخط الواصل بين المركز و q (الشحنة الأصلية)

بما أنه P تقع على سطح الكرة فالجهد عندها يساوي صفر.

$$V_p = 0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{s-R} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'}{R-z'}$$

Be Happy

$$q' = \frac{R-z'}{s-R}(-q)$$

لو أخذنا كمان نقطة Q ع امتداد الخط بين q والمركز بالكن ع الجهة المقابلة للنقطة P وتقع ع السطح أيضاً.

سيكون الجهد الكهربائي أيضاً يساوي صفراً عندها.

$$V_Q = 0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{S+R} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'}{R+Z'}$$

$$q' = \frac{R+Z'}{S+R}(-q)$$

$$q' = q'$$

$$\frac{R+Z'}{S+R}(-\cancel{q}) = \frac{R-Z'}{S-R}(-\cancel{q})$$

$$(R+Z')(S-R) = (R-Z')(S+R)$$

$$\cancel{RS} + SZ' - R^2 - \cancel{RZ'} = \cancel{RS} + R^2 - Z'S - \cancel{Z'R}$$

$$2SZ' = 2R^2$$

$$Z' = \frac{R^2}{S}$$

هيك نكون طلعنا موقع 'q عن المركز ونقدر هلا نطلع قيمتها بدلالة q (الشحنة الأصلية).

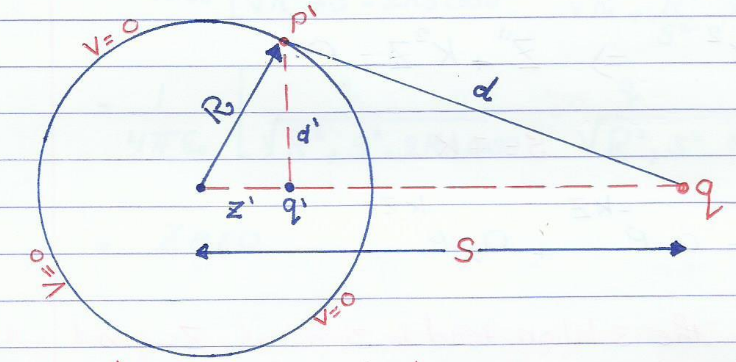
$$q' = \frac{R + Z'}{S + R}(-q)$$

$$= \frac{-q}{S+R}\left(R + \frac{R^2}{S}\right) = \frac{-q}{S+R} R \left(\frac{S+R}{S}\right)$$

$$= -q \frac{R}{S}$$

$$q' = -q \frac{R}{S}$$

SaRa Physics



لو فرضت هلا انه عندي نقطة أخرى ع السطح P' راح تكون المسافة بينها وبين الشحنة q هي d والمسافة بين P' والشحنة q' راح تكون d' .

باستخدام قانون جيب التمام (Cosine Rule) ممكن أكتب d و d' بدلالة R ، S و θ .

$$d = \sqrt{R^2 + S^2 - 2R\cos\theta}$$

$$d' = \sqrt{R^2 + z'^2 - 2Rz'\cos\theta}$$

$$= \sqrt{R^2 + \left(\frac{R^2}{s}\right)^2 - 2R\left(\frac{R^2}{s}\right)\cos\theta}$$

إذن بحسِب الجهد عند p'

$$V_{p'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{d} + \frac{q'}{d'}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{R^2+s^2-2Rs\cos\theta}} + \frac{-q\,R/s}{\sqrt{R^2+\frac{R^4}{s^2}-2R\frac{R^2}{s}\cos\theta}}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{R^2+s^2-2Rs\cos\theta}} - \frac{q}{\sqrt{R^2+s^2-2Rs\cos\theta}}\right]$$

$$= \text{Zero}$$

إذن بنستنتج انه توزيع الشحنات الأصلي (وجود q فقط في المسألة الأصلية ويكون الجهد = صفر على سطح الكرة) وتوزيع الشحنات الصورة يعني النظام الجديد اللي فرضناه وهو وجود q' أيضاً بعطيني جهد كهربائي بحقق نفس الـ BCs .

هلا في المنطقة الواقعة خارج الكرة راح تكون قيمة الجهد بتساوي الجهد الناشئ عن الشحنة الأصلية q والشحنة الصورة/التخيلية q' .

وهاد الجهد راح يكون شكله كالتالي

افرض انه عندك نقطة عشوائية (r,θ,φ) في المنطقة خارج الكرة.

المسافة بينها وبين q راح تساوي d وبينها وبين q' راح تساوي d'.

$$d = \sqrt{r^2 + S^2 - 2rS\cos\theta}$$

$$d' = \sqrt{r^2 + z'^2 - 2rz'\cos\theta}$$

$$= \sqrt{r^2 + \frac{R^4}{S^2} - 2r\frac{R^2}{S}\cos\theta}$$

SaRa
2019

إذن $V(r,\theta,\varphi)$ بيساوي

$$V(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{d} + \frac{q'}{d'}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{r^2 + S^2 - 2rS\cos\theta}} + \frac{-q\,R/S}{\sqrt{r^2 + \frac{R^4}{S^2} - 2r\frac{R^2}{S}\cos\theta}}\right]$$

هلا بدي أدخل $\frac{R}{S}$ تحت الجذر $\Rightarrow$ راح تدخل بشكل $\frac{S}{R}$

أو بطريقة أخرى اضرب البسط والمقام ب $\frac{S}{R}$

$$V(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{r^2 + S^2 - 2rS\cos\theta}} - \frac{q}{\sqrt{\left(\frac{rS}{R}\right)^2 + R^2 - 2rS\cos\theta}}\right]$$

b) Find the induced surface charge on the sphere as function of q. Integrate this to get the total induced charge.

بنقدر نطلع σ من الـ BCs تبعت E اللي ناقشناها سابقاً لما حكينا عن الـ (continuty) تبعت E.

$$\vec{E}_{out} - \vec{E}_{in} = \vec{E}_{out} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{r}$$

المجال جوا يساوي صفر و العمودي على سطح الكرة يكون باتجاه $\hat{r}$.

$$E_{out} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n} = \vec{E}_n\hat{n}$$

$$\sigma = \varepsilon_0 \vec{E}_n$$

$$\sigma = \varepsilon_0 \frac{-\partial V}{\partial n}$$

زهقته من حل السؤال !! معلش لسا ضايل كمان فرع !!

احنا أوجدنا V في الفرع السابق ، لو اشتقناه وعوضناه راح يصير عنا

$$\sigma = \frac{-q}{4\pi}\left[\frac{-r + s\cos\theta}{(r^2+s^2-2rs\cos\theta)^{3/2}} - \frac{-rs^2/R^2 + s\cos\theta}{\left(\left[\frac{rs}{R}\right]^2 + R^2 - 2rs\cos\theta\right)^{3/2}}\right]_{r=R}$$

$$= \frac{-q}{4\pi}\left[\frac{-R + s\cos\theta}{(R^2+s^2-2Rs\cos\theta)^{3/2}} - \frac{-s^2/R + s\cos\theta}{(s^2+R^2-2Rs\cos\theta)^{3/2}}\right]$$

$$= \frac{-q}{4\pi R}\frac{s^2-R^2}{(R^2+s^2-2Rs\cos\theta)^{3/2}}$$

السحنة الكلية عل الكرة ممكن نحصل عليها من .Surface Integ تبع σ عل سطح الكرة

$$Q = \iint \sigma R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$= -\frac{q}{2} R (S^2 - R^2) \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta \, d\theta}{(R^2 + S^2 - 2RS\cos\theta)^{3/2}}$$

$$= \frac{-q}{2} R (S^2 - R^2) \left[\frac{-1/SR}{\sqrt{R^2 + S^2 - 2RS\cos\theta}} \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{q}{2} (S^2 - R^2) \left[\frac{1}{|R+S|} - \frac{1}{|R-S|} \right]$$

$$= -q \frac{R}{S}$$

(c) Calculate the electrostatic energy of this configuration.

ممكن نلاقي طاقة النظام بإيجاد الشغل اللازم لتكوين هاد النظام والذي يتم بحساب الـ (path Integral) تبع القوة اللي بنحتاجها لتحريك النقطة q من ∞ إلى موقعها النهائي ($Z = S$).

الشحنة q راح تتعرض لقوة جذب من الشحنة المستحثة عل سطح الكرة اللي أوجدناها في الفرع السابق وهي مساوية للـ اللي تبعملها الشحنة الصورة q' عل q.

$$\vec{F}_{qq'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q q'}{(S - Z')^2} \hat{k}$$

الشحنة الكلية على الكرة ممكن نحصل عليها من .Surface Integ تبع σ على سطح الكرة

$$Q = \iint \sigma R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$= -\frac{q}{2} R (S^2 - R^2) \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta \, d\theta}{(R^2 + S^2 - 2RS\cos\theta)^{3/2}}$$

$$= \frac{-q}{2} R (S^2 - R^2) \left[\frac{-1/SR}{\sqrt{R^2 + S^2 - 2RS\cos\theta}} \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{q}{2} (S^2 - R^2) \left[\frac{1}{|R+S|} - \frac{1}{|R-S|} \right]$$

$$= -q \frac{R}{S}$$

(c) Calculate the electrostatic energy of this configuration.

ممكن فعلاً في طاقة النظام بإيجاد الشغل اللازم لتكوين هاد النظام والذي يتم بحساب الـ (path Integral) تبع القوة اللي بنحتاجها لتحريك النقطة q من ∞ إلى موقعها النهائي ($Z = S$).

الشحنة q راح تتعرض لقوة جذب من الشحنة المستحثة على سطح الكرة اللي أوجدناها في الفرع السابق وهي مساوية للقوة اللي تحملها الشحنة الصورة q' على q.

$$\vec{F}_{qq'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q q'}{(S - Z')^2} \hat{k}$$

SaRa

$$\vec{F}_{qq'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q\left(-\frac{R}{s}q\right)}{\left(s - \frac{R^2}{s}\right)^2} \hat{k}$$

$$= \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{sRq^2}{(s^2-R^2)^2} \hat{k}$$

القوة اللازمة لإزاحة q من ∞ إلى موقعها بتكون عكس $\vec{F}_{qq'}$.

الشغل الكلي اللازم لجلب q من ∞ إلى موقعها يساوي

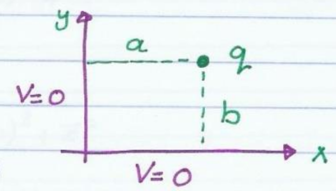
$$W = \int_{\infty}^{s} -\vec{F}_{qq'} \cdot d\vec{l}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\infty}^{s} \frac{zRq^2}{(z^2-R^2)^2}\, dz$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left.\frac{-Rq^2}{2(z^2-R^2)}\right|_{\infty}^{s} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \frac{Rq^2}{s^2-R^2}$$

بما أنه خلص السؤال
تذكرونا بدعوة منيحة
Thank u !^^

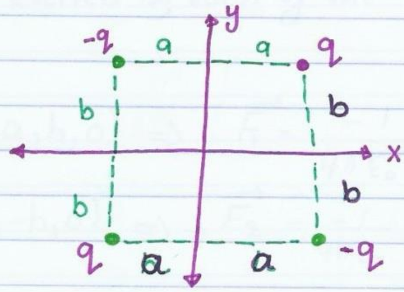
Q11) Two semi-infinite grounded conducting planes meet at right angles. In the region between them, there is a point charge q, situated as shown in Fig. Set up the image configuration, and calculate the potential in this region. What charges do you need, and where should they be located? What is the force on q? How much work did it take to bring q in from infinity?



Consider the system of four charges shown in Fig 2.

The electrostatic potential generated by this charge distribution is zero at every point on the yz-plane & at every point on the xz-plane.

=> electrostatic potential generated by this image charge distribution satisfies the same boundary conditions as the electrostatic potential of the original system.



بالمختصر المفيد انه فرضنا
نظام جديد بس الجهد فيه
تحقق نفس الـ BCs
تبعت النظام الأصلي

The potential at a point $P = (x, y, z)$

$$V_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2}}$$

$$+ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{-q}{\sqrt{(x-a)^2 + (y+b)^2 + z^2}}$$

$$+ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{-q}{\sqrt{(x+a)^2 + (y-b)^2 + z^2}}$$

$$+ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\sqrt{(x+a)^2 + (y+b)^2 + z^2}}$$

The total force is equal to the vector sum of the forces exerted by each of the three image charges.

$$q(-a, b, 0) \Rightarrow \vec{F_1} = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{4a^2} \hat{i}$$

$$q(a, -b, 0) \Rightarrow \vec{F_2} = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{4b^2} \hat{j}$$

$$q(-a, -b, 0) \Rightarrow \vec{F_3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{4a^2 + 4b^2} \frac{a\hat{i} + b\hat{j}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$= \frac{1}{16\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{(a^2+b^2)^{3/2}} (a\hat{i} + b\hat{j})$$

$$\vec{F}_{net} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}$$

$$= \frac{-q^2}{16\pi\varepsilon_0}\left[\left(\frac{1}{a^2} - \frac{a}{(a^2+b^2)^{3/2}}\right)\hat{i} + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{b}{(a^2+b^2)^{3/2}}\right)\hat{j}\right]$$

The electrostatic potential energy of the system can be obtained by calculating the path integral of $-\vec{F}_{tot}$ between infinity and $(a, b, 0)$. ~~to~~

However, this is not trivial since the force $-\vec{F}_{tot}$ is a rather complex function of a & b.

An easier technique is to calculate the electrostatic potential energy of the system with charge & image charges.

The potential energy of this system is

$$W_{image} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-q^2}{2a} + \frac{-q^2}{2b} + \frac{q^2}{\sqrt{4a^2+4b^2}}\right]$$

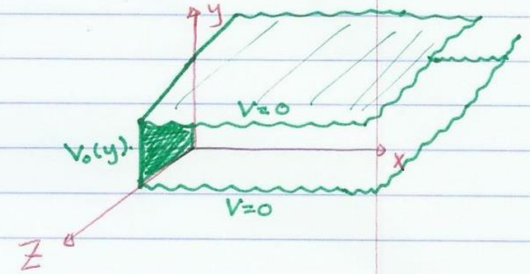
$$= \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right]$$

However, in the real system the electric field is only non-zero in region ($x>0$ & $y>0$).

$$W_{real} = \frac{1}{4} W_{image} = \frac{q^2}{32\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right]$$

النظام الأصلي؛ المجال فيه بس موجود في الربع الأول عشان هيك الطاقة ربع طاقة النظام الصورة/المتخيل.

Exp 3.3) Two infinite grounded metal plates lie parallel to the xz-plane, one at $y=0$, the other at $y=a$. The left end, at $x=0$, is closed off with an infinite strip insulated from the two plates, and maintained at a specific potential $V_0(y)$. Find the potential inside this "Slot".



$$\nabla^2 V = 0$$

$$V_{xx} + V_{yy} = 0$$

$$V(x,0) = 0$$
$$V(x,a) = 0$$
$$V(0,y) = V_0(y)$$

$$V \to 0 \text{ as } x \to \infty$$

هلا السؤال بحكيلنا انه في عندي صفيحتين
لانهائيتين موصولات مع الأرض
وجايات بشكل موازي لـ xz_{Plane} ،
وحدة منهم محطوطة ع $y=0$
والتانية ع $y=a$.
وعند $x=0$ يعني ع يسارهم مسكر
بعازل وموضوع هاد العازل
ع جهد معين مقداره $V_0(y)$.
وطالب منا الجهد داخل
الشكل اللي تكون من هاد النظام
واللي هو مبين في الرسمة فوق.

$$V(x,y) = X(x)\,Y(y).$$

$$X''Y + Y''X = 0$$

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = -\lambda$$

هون بدنا نحل معادلة لابلاس
باستخدام separation of variable
مثل ما هو موضح ع اليسار.

$$\lambda = +k^2$$

$$-\frac{X''}{X} = -\lambda = -k^2$$

$$X'' - k^2 X = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) = A e^{kx} + B e^{-kx}$$

$$\frac{Y''}{Y} = -k^2$$

$$Y'' + k^2 Y = 0$$

$$Y(y) = C \cos ky + D \sin ky$$

$$Y(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$Y(a) = 0 \Rightarrow ka = n\pi$$

$$\boxed{k = \frac{n\pi}{a}} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$V(x, y) = X(x)\, Y(y)$$

$$V_n(x, y) = C_n e^{-kx} \sin \frac{n\pi}{a} y$$

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{n\pi}{a}x} \sin \frac{n\pi}{a} y$$

$$V(0, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{a} y = V_0(y)$$

$$C_n = \frac{2}{a} \int_0^a V_0(y) \sin \frac{n\pi}{a} y \, dy$$

$$C_n = \frac{2}{a} \int_0^a V_0(y) \sin \frac{n\pi y}{a} \, dy$$

$$C_n = \frac{2V_0}{a} \int_0^a \sin \frac{n\pi y}{a} \, dy$$

$$C_n = \frac{2V_0}{n\pi}(1-\cos n\pi) = \begin{cases} 0, & n:\text{even} \\ \frac{4V_0}{n\pi}, & n:\text{odd} \end{cases}$$

$$V(x,y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n:\text{odd}} \frac{1}{n} e^{-\frac{n\pi}{a}x} \sin \frac{n\pi}{a} y$$

We can write

$$V(x,y) = \frac{2V_0}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{\sin(\pi y/a)}{\sinh(\pi x/a)}\right)$$

The success of this method hinged on two extra ordinary properties of the separable solutions.

(1) Completeness
(2) Orthoganality

$f_n(Y)$ is said to be Complete if any other function $f(y)$ can be expressed as a linear combination of them

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n f_n(Y).$$

A set of functions is orthogonal if the integral of the product of any two different members of the set is zero.

$$\int_0^a f_n(Y) f_{n'}(y)\, dy = 0 \qquad (n' \neq n).$$

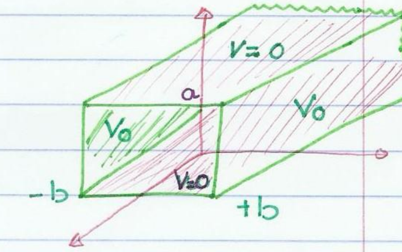
Exp4). Two infinitely-long grounded metal plates, again at $y=0$ & $y=a$, are connected at $x=\mp b$ by metal strips maintained at a constant potential V_0. Find the potential inside the resulting rectangular pipe.

$V(b, y) = V_0$

$V(-b, y) = V_0$

$V(x, 0) = 0$

$V(x, a) = 0$



هاد السؤال حلينا مثله قبل
بس الفرق هون انه سكرنا
الطرف اليمين عند $x=b$
كمان بحاجز والطرف
اليسار مسكر مثل قبل
بس هالمرة مش عند $x=0$
بل عند $x=-b$

$V_{xx} + V_{yy} = 0$

$V(x,y) = X(x)\, Y(y)$.

$X''Y + Y''X = 0$

$$\frac{-X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = -k^2$$

$X'' - k^2 X = 0$

$r^2 = k^2 \Rightarrow r = \mp k$

$X(x) = A e^{kx} + B e^{-kx}$

$Y'' + k^2 Y = 0$

$Y(y) = C \cos ky + D \sin ky$

$Y(0) = 0 \Rightarrow C = 0$

$Y(a) = 0 \Rightarrow k = \frac{n\pi}{a}$

ما بنحط خذف $e^{+()}$ لأنه هون x ما بروح لـ ∞

We cannot set $A=0$ (X: doesn't extend to ∞)

The situation is symmetric ($V(-x,y) = V(x,y)$)

$$\Rightarrow A=B$$

$$X(x) = Ae^{kx} + Ae^{-kx} = 2A\cosh kx$$

$$V(x,y) = X(x)\,Y(y)$$

$$= \sum C_n \cosh\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

$$V(b,y) = V_0$$

$$V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cosh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)\sin\frac{n\pi}{a}y$$

$$C_n \cosh\frac{n\pi b}{a} = \frac{2}{a}\int_0^a V_0 \sin\frac{n\pi}{a}y$$

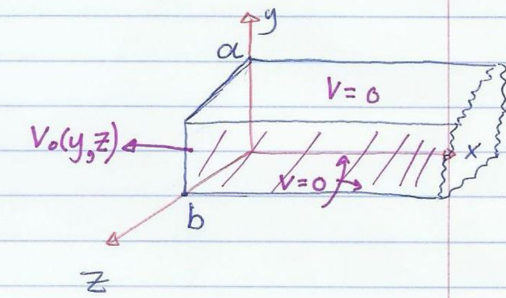
$$= \begin{cases} 0, & n\text{: even} \\ \dfrac{4V_0}{n\pi}, & n\text{: odd} \end{cases}$$

$$V(x,y) = \frac{4V_0}{\pi}\sum_{n:odd}\frac{\cosh(n\pi/a)x}{n\cosh(n\pi b/a)}\sin\left(\frac{n\pi}{a}\right)y$$

Q Exp 3.5). An infintely long rectangular metal pipe (sides a & b) is grounded, but one end, at $X=0$ is maintained at a specified potential $V_o(y,z)$, as indicated in Fig. Find the potential inside the pipe.

$V(x,y,0)=0$
$V(x,y,b)=0$

$V(x,0,z)=0$
$V(x,a,z)=0$



$V(0,y,z)=V_o(y,z)$.

$V\to 0$ as $X\to\infty$ (V bounded).

$$V_{xx}+V_{yy}+V_{zz}=0$$

$$V(x,y,z)=X(x)\,Y(y)\,Z(z).$$

$$\underbrace{\frac{X''}{X}}_{k^2+l^2}+\underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{-k^2}+\underbrace{\frac{Z''}{Z}}_{-l^2}=0$$

$Z''+l^2Z=0 \Rightarrow Z(z)=E\sin lz+F\cos lz$

$Y''+k^2Y=0 \Rightarrow Y(y)=C\sin ky+D\cos ky$

$X''-(k^2+l^2)X=0 \Rightarrow X(x)=A\,e^{\sqrt{k^2+l^2}\,x}+B\,e^{-\sqrt{k^2+l^2}\,x}$

$X(x) \to 0$ as $x \to \infty$ $\{A = 0\}$.

$$X(x) = B e^{-\sqrt{K^2+L^2}\, x}$$

$Y(0) = 0 \longrightarrow \{D = 0\}$.

$Y(a) = 0 \longrightarrow k\cancel{y}^{a} = n\pi \Rightarrow k = \frac{n\pi}{a}$

$Z(\cancel{0}) = 0 \longrightarrow F = 0$

$Z(b) = 0 \longrightarrow \left\{ l = \frac{m\pi}{b} \right\}$

$$V_{n,m}(x,y,z) = C_{n,m}\, e^{-\sqrt{(\frac{n\pi}{a})^2 + (\frac{m\pi}{b})^2}\, x} \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}\right) z$$

$$V(x,y,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{n,m}\, e^{-\sqrt{(\frac{n\pi}{a})^2 + (\frac{m\pi}{b})^2}\, x} \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b} z\right)$$

$$V(0,y,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{n,m} \sin\left(\frac{n\pi}{a}\right) y \sin\left(\frac{m\pi}{b}\right) z$$

$$= V_0(\cancel{z}, y)$$

$$C_{n,m} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a V_0(y,z) \sin \frac{n\pi}{a} y \sin \frac{m\pi}{b} z \, dy\, dz$$

If the end of the tube is a conductor at const potential V_0 إذا كانت نهاية الـ (tube) عبارة عن موصل موضوع على جهد ثابت

$$C_{n,m} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a V_0 \sin \frac{n\pi}{a} y \ \sin \frac{m\pi}{b} z \ dy \, dz$$

$$= \frac{4V_0}{ab} \int_0^b \int_0^a \sin \frac{n\pi}{a} y \, dy \ \sin \frac{m\pi}{b} z \, dz$$

$$= \frac{4V_0}{ab} \begin{cases} 0 & , \ n, m : \text{even} \\ \dfrac{16 V_0}{\pi^2 nm} & , \ n, m : \text{odd} \end{cases}$$

$$V(x,y,z) = \frac{16 V_0}{\pi^2} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{odd}}}^{\infty} \sum_{\substack{m \\ \text{odd}}} \frac{1}{nm} \sin \frac{n\pi}{a} y \ \sin \frac{m\pi}{b} z \ e^{-\sqrt{k^2+l^2}\, x}$$

بعرف انه المعادلات أطول من حياتي ، بس هيك المادة والمفروض تتعود تكتب هاي التفاصيل .

ما بكفي تعرف الفكرة العامة ، خطوات الحل مهمة وأي غلط بسيط بخرب المسألة .

Q13) Find the potential in the infinite slot of Ex 3-3 if the boundary $X=0$ consists of two metal strips: one, from $y=0$ to $y=a/2$ is held at const potential V_0 and the other from $y=\frac{a}{2}$ to $y=a$ is at potential $-V_0$.

$$V_{xx}+V_{yy}=0$$

$$V(x,0)=0$$
$$V(X,a)=0$$

$$V(0,y)=0$$
$$V \to 0 \text{ as } X \to 0$$

هاد السؤال بكملك ارجع لمثال حليناه
قبل بس بدو يغير في الـ BCs
عند $x=0$ ما حط عازل واحد عليه جهد
معين ، لأ ، قسمه لقسمين: القسم الأول
من $y=0$ إلى $y=\frac{a}{2}$ وحطوله
جهد V_0 و القسم الثاني من $y=\frac{a}{2}$
إلى $y=a$ حطوله جهد $-V_0$.

$$V_{xx}+V_{yy}=0$$

$$V(x,y)=X(x)\,Y(y)$$

$$\underbrace{\frac{X''}{X}}_{+k^2}+\underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{-k^2}=0$$

$$X''-k^2X=0$$

$$X(x)=Ae^{-kx}+Be^{+kx}$$

(solution bounded at $x \to \infty$).
$\Rightarrow B=0$

$$X(x)=Ae^{-kx}$$

$$Y(y)=F\cos ky+G\sin ky$$

$$Y(0)=0 \Rightarrow \boxed{F=0}$$

$$Y(a)=0 \Rightarrow k=\frac{n\pi}{a}$$

$$Y(y)=G\sin\frac{n\pi}{a}y$$

$$V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \, e^{-\frac{n\pi}{a}x} \sin\frac{n\pi}{a}y$$

$$V(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi}{a}y = \begin{cases} V_0 , & 0<y<\frac{a}{2} \\ -V_0 , & \frac{a}{2}<y<a \end{cases}$$

$$C_n = \frac{2}{a}\int_0^a V(0,y) \sin\frac{n\pi}{a}y \, dy.$$

$$= \frac{2}{a}\left[\int_0^{a/2} V_0 \sin\frac{n\pi}{a}y \, dy + \int_{a/2}^{a} -V_0 \sin\frac{n\pi}{a}y \, dy \right]$$

$$= \frac{2V_0}{a}\left[\cos\frac{n\pi}{a}y \Big|_{a/2}^{0} + \cos\frac{n\pi}{a}y \Big|_{a/2}^{a} \right] \frac{a}{n\pi}$$

$$= \frac{2V_0 a}{a n\pi}\left[\left(1 - \cos\frac{n\pi}{2}\right) + \underset{-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\left(\cos n\pi\right)} \right] = \frac{2V_0}{\cancel{a} n\pi}\left[1 + (-1)^n - 2\cos\frac{n\pi}{2} \right]$$

$n=1$: $1-1-2\cos\frac{\pi}{2} = 0$

$n=2$: $1+1-2\cos\pi = 4$

$n=3$: $1-1-2\cos\frac{3\pi}{2} = 0$

$n=4$: $1+1-2\cos 2\pi = 0$

$$\Rightarrow C_n = \begin{cases} \frac{8V_0}{n\pi} , & n = 2, 6, 10, 14 \qquad (4j+2) \\ 0 , & \text{o.w} \end{cases}$$

$$V(x,y) = \frac{8V_0}{\pi} \sum_{n=4j+2}^{\infty} \frac{1 e^{-\frac{n\pi}{a}x}}{n} \sin\frac{n\pi}{a}y$$

Q14) Find the potential in the infinite slot of Ex 3.3 if the boundary at $x=0$ consists to two metal strips : one, from $y=0$ to $y=\pi/2$ is held at const. potential V_0 & the other from $y=\pi/2$ to $y=\pi$ is at potential $-V_0$.

$$V(0,y) = \begin{cases} V_0 & 0<y<\frac{\pi}{2} \\ -V_0 & \frac{\pi}{2}<y<\pi \end{cases}$$

The Fourier coefficients of $V_0(y)$ are equal

$$D_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin ky \; V_0(y)\, dy$$

$$= \frac{2}{\pi} V_0 \int_0^{\pi/2} \sin ky \, dy - \frac{2}{\pi} V_0 \int_{\pi/2}^{\pi} \sin(ky)\, dy$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{V_0}{k}\left[1+\cos(k\pi) - 2\cos\left(\frac{1}{2}k\pi\right)\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{V_0}{k} C_k .$$

$C_1 = 0$ $\quad C_3 = 0$ $\quad \Rightarrow \quad C_{k+4} = C_k .$
$C_2 = 4$ $\quad C_4 = 0$

$$C_k = \begin{cases} 4 & k = 2, 6, 10 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$D_k = \begin{cases} \dfrac{8V_0}{k\pi} & k = 2, 6, 10 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$V(x,y) = \frac{8V_0}{\pi} \sum_{k=2,6,10}^{\infty} \frac{1}{k} e^{-kx} \sin(ky).$$

Q14). For the infinite slot in Exp 3.3 determine the charge density $\sigma(y)$ on the strip at $x = 0$ assuming it is a conductor at constant potential V_0

The electrostatic potential in the slot is equal to

$$V(x,y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{k=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{k} e^{-kx} \sin(ky).$$

The charge density at $x = 0$ can be obtained using the boundary conditions for the electric field at a boundary

$$\vec{E}_{x=+0} - \vec{E}_{x=-0} = \vec{E}_{x=+0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{n} \qquad (\hat{n} = \hat{i}).$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=+0} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

هون طالبينا نوجد كثافة الشحنة السطحية وبالعادة راح نستخدم الـ BCs تبعت $\vec{E}$ اللي حكينا عنها لما ناقشنا الـ Continuity تبعت $\vec{E}$.

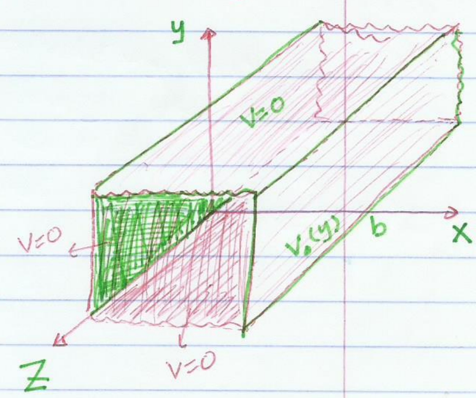
$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{-4V_0}{\pi} \sum_{K=1,3,5}^{\infty} e^{-kx} \sin ky$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=+0} = -\frac{4V_0}{\pi} \sum_{K:odd}^{\infty} \sin ky$$

$$\sigma = -\varepsilon_0 \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=+0} = \frac{4V_0 \varepsilon_0}{\pi} \sum_{K:odd} \sin ky$$

Q15). A rectangular pipe, running parallel to the z-axis (from $-\infty$ to $+\infty$), has three grounded metal sides, at $y=0$, $y=a$ and $x=0$. The fourth side at $x=b$, is maintained a specified potential $V_0(y)$.

(a) Develop a general formula for the potential inside the pipe.
(b) Find the potential explicitly, for the case $V_0(y) = V_0$ (constant).



$V(x,0)=0$
$V(x,a)=0$

$V(0,y)=0$
$V(b,y)=0$

$$\underbrace{\frac{X''}{X}}_{K^2} + \underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{-K^2} = 0$$

$X'' - k^2 X = 0$

$X(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}$

$X(0) = 0$

$X(0) = A(1) + B(1) = 0$

$\boxed{A = -B}$

$X(x) = A\left[e^{kx} - e^{-kx}\right]$

$X(x) = 2A \sinh(kx)$

$Y'' + k^2 Y = 0$

$Y(y) = C \cos ky + D \sin ky$

$Y(0) = 0$

$\boxed{C = 0}$

$Y(a) = 0 = D \sin ka.$

$ka = n\pi$

$\boxed{k = \frac{n\pi}{a}}$

$$V_n(x,y) = X_n(x)\, Y_n(y)$$

$$V_n(x,y) = 2A \sinh\left(\frac{n\pi}{a}x\right) D \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

$$= 2AD \sinh\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right).$$

$$\boxed{V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)}$$

^ ^

SaRa Jamal 2019

$$V(b,y) = V_0(y)$$

$$V_0(y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right).$$

$$C_n \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) = \frac{2}{a}\int_0^a V_0(y) \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right).dy.$$

$$C_n = \frac{2}{a \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \int_0^a V_0(y) \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) dy$$

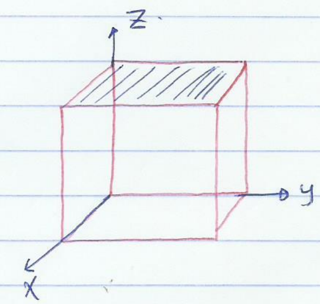
If $V_0(y) = V_0 = \text{const}$

$$C_n = \frac{2V_0}{a \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) dy$$

$$= \frac{2V_0}{a \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \left[1 - (-1)^n\right] = \begin{cases} \dfrac{4V_0}{a \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}, & n: \text{odd} \\ 0, & n: \text{even} \end{cases}$$

$$V(x,y)=\frac{4V_0}{\pi}\sum_{n:odd}\frac{\sinh(n\pi x/a)}{n\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right).$$

Q16) A cubical box (sides of length a) consists of five metal plates, which are welded together and grounded. The top is made of a separate sheet of metal, insulated from the others, and held at a constant potential V_0. Find the potential inside the box.



$$\left.\begin{aligned}
&V(x,y,a)=V_0\\
&V(x,y,0)=0\\
&V(x,a,z)=0\\
&V(x,0,z)=0\\
&V(0,y,z)=0\\
&V(a,y,z)=0
\end{aligned}\right\}$$

$$V(x,y,z)=X(x)\,Y(y)\,Z(z).$$

$$\underbrace{\frac{X''}{X}}_{-k^2}+\underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{-L^2}+\underbrace{\frac{Z''}{Z}}_{k^2+L^2}=0$$

هاد السؤال بختلف عن اللي قبله انه حل المعادله لابلاس راح يتحقق ع جميع الاحداثيات x و y و z وهون راح نحتاج تنتين من الـ (Summations)

$$X'' + k^2 X = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) = A\cos kx + B\sin kx$$

$$Y'' + L^2 Y = 0 \quad \Rightarrow \quad Y(y) = C\cos Ly + D\sin Ly$$

$$Z'' - (k^2 + l^2) Z = 0 \quad \Rightarrow \quad Z(z) = F e^{\sqrt{k^2+L^2}\, z} + G e^{-\sqrt{k^2+L^2}\, z}$$

$$X(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) = B\sin kx.$$

$$X(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad ka = n\pi \quad \Rightarrow \quad k = \frac{n\pi}{a}.$$

$$Y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad Y(y) = D\sin Ly$$

$$Y(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad aL = m\pi \quad \Rightarrow \quad L = \frac{m\pi}{a}.$$

$$Z(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad F = -G.$$

$$Z(z) = 2F\left[\sinh\left(\sqrt{k^2+L^2}\, z\right)\right]$$

$$V(x,y,z) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{n,m} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right)\sinh\left(\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}\, z\right)$$

$$V(x,y,a) = V_0 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{n,m} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right)\sinh\left(\frac{\cancel{a}\pi}{\cancel{a}}\sqrt{m^2+n^2}\right)$$

عوض $a = z$

$$C_{n,m} = \frac{2}{a}\,\frac{2}{a}\,\frac{V_0}{\sinh(\ )}, \int_0^a\int_0^a \sin\frac{n\pi x}{a}\,\sin\frac{n\pi y}{a}\,dx\,dy$$

$$C_{n,m} = \frac{4V_0}{a^2 \sinh(\pi\sqrt{n^2+m^2})} \begin{cases} 0 , & n,m : \text{even} \\ \frac{4a^2}{(n\pi)^2} , & n,m : \text{odd} \end{cases}$$

$$V(x,y,z) = \frac{16V_0}{\pi^2} \sum_{n:odd} \sum_{m:odd} \frac{1}{nm} \sin\frac{n\pi}{a}x \, \sin\frac{n\pi}{a}y \, \frac{\sinh(\frac{\pi}{a}\sqrt{n^2+m^2}\, z)}{\sinh(\pi\sqrt{n^2+m^2})}.$$

هاد السؤال راح تشوفوا مثله في الفورمات يعني ما تستبعدوا دراسته لأنه في 2 (summation)

ولهون بنكون حلينا أمثلة ع separation of variables في ال (Cartesian Coordinates)

وبدنا نبلش ناخد أمثلة ع spherical Coordinates . وراح يصير في تفاصيل أصعب

شوي بس ضروري تمشي خطوة خطوة عشان إذا غلطت مش راح تعرف وين الغلط من كتر التفاصيل وراح تضطر ترجع كل من أول.

بس هاد مش معناته انه الاشي خارق وما بنحل ، كل ما في الأمر انه فيه تفاصيل أكثر وخطوات متشابهة.

⊗ Spherical Coordinates

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0$$

If the problem is azimuthal symmetry

(V: independent of φ).

$$\nabla^2 V = \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) = 0$$

$$V(r,\theta) = R(r)\,\Theta(\theta).$$

$$\underbrace{\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right)}_{L(\ell+1)} + \underbrace{\frac{1}{\Theta \sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta}\right)}_{-L(L+1)} = 0$$

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) = L(\ell+1)$$

$$2rR' + r^2 R'' - \ell(\ell+1)R = 0$$

Cauchy - Euler equation.

Suppose $R(r) = r^S$

$$r^2\left(S(S-1)\,r^{S-2}\right) + 2r\left(r^{S-1}(S)\right) - L(\ell+1)\,r^S = 0.$$

$$S(S-1)\,r^S + 2S\,r^S + \ell(\ell+1)\,r^S = 0.$$

$$S^2 - S + 2S - L(\ell+1) = 0$$

$$S^2 + S - L(\ell+1) = 0$$

$$(S-L)\left(S+(\ell+1)\right) = 0$$

$$S = L \quad \text{or} \quad S = -(L+1)$$

$$R(r) = A\,r^L + B\,r^{-(L+1)}.$$

$$R(r) = Ar^L + \frac{B}{r^{+(L+1)}}.$$

هاد اللي بنعمله مهم تفهمه كله بالأنه الأساس لكل شيء بعده

احنا قاعدين نحاول نوصل لحل معادلة لابلاس في الإحداثيات الكروية (spherical coordinates) وكل شيء بعدين بصير حالة خاصة من الحل العام

الفكرة طبعًا باستخدام فصل المتغيرات وفرض انه الحل هو حاصل ضرب اقترانات كل واحد منها بعتمد ع متغير مستقل ماله علاقة بالاقترانات الأخرى.

$$\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta}\right) = -\ell(\ell+1)\sin\theta\,\Theta$$ legendre equation.

$$\Theta = P_L(\cos\theta).$$

$$\boxed{P_\ell(x) = \frac{1}{2^L L!}\left(\frac{d}{dx}\right)^L (x^2-1)^\ell}$$

$$V_L(r,\theta) = \left[A r^L + \frac{B}{r^{L+1}}\right] P_L(\cos\theta).$$

$$\boxed{V(r,\theta) = \sum_{L=0}^{\infty}\left[A_L r^L + \frac{B_L}{r^{L+1}}\right] P_L(\cos\theta)}$$

هاد الشكل العام للحل

If a hollow sphere is held at $V_0(\theta)$ on surface

إذا كانت كرة مجوفة محطوطة على جهد $V_0(\theta)$

(1) The potential inside the sphere الجهد في الداخل

$$B_L = 0 \quad \forall L \quad (\text{if } B_L \neq 0,\ V \to \infty \text{ at } r=0)$$

$$V(r,\theta) = \sum_{L=0}^{\infty} A_L r^L P_L(\cos\theta).$$

$$V(R,\theta) = V_0 = \sum_{L=0}^{\infty} A_L R^L P_L(\cos\theta).$$

سارة جمال
SaRa
Physics

$$A_L = \frac{1}{R^L} \frac{2L+1}{2} \int_0^{\pi} V_0(\theta)\, P_L(\cos\theta)\, d(\cos\theta).$$

(2) The potential outside the sphere. الجهد خارج الكرة

$$A_L = 0 \quad \forall \ell \quad (V \to 0 \text{ as } r \text{ increases})$$

$$V(r,\theta) = \sum_{L=0}^{\infty} \frac{B_L}{r^{L+1}} P_L(\cos\theta)$$

$$V(R,\theta) = V_0(\theta) = \sum_{L=0}^{\infty} \frac{B_L}{R^{L+1}} P_L(\cos\theta).$$

$$B_L = R^{L+1} \frac{2L+1}{2} \int_0^{\pi} V_0(\theta)\, P_\ell(\cos\theta)\, d(\cos\theta).$$

SaRa
Jamal
2019

هلا خلينا ناخذ أمثلة محلولة عالموضوع وهي عبارة عن بعض الأسئلة من الكتاب.

الحل طويل بس حاول طول بالك أكثر منه! ^^ عشان تنجح هههه

Q19) The potential at the surface of a sphere is given by $V_o(\theta) = k\cos(3\theta)$ where K is some constant. Find the potential inside and outside the sphere, as well as the surface charge density $\sigma(\theta)$ on the sphere. (Assume there is no charge inside or outside of the sphere).

The most general solution of Laplace's equation in spherical Coordinates is

$$V(r,\theta) = \sum_{L=0}^{\infty}\left[A_L r^L + \frac{B_L}{r^{L+1}}\right] P_L(\cos\theta).$$

when $r<R \Rightarrow B_m = 0$, if $B_m \neq 0$ $V \to \infty$ at $r=0$.

هاد السؤال معطينا
الجهد على سطح كرة
وهو اقتران بدلالة
θ وطالب منا
نوجد الجهد
جوا وبرا
الكرة

$$V(r,\theta) = \sum_{L=0}^{\infty} A_L r^L P_L(\cos\theta)$$

$$V(R,\theta) = V_o(\theta) = \sum_{L=0}^{\infty} A_L R^L P_L(\cos\theta).$$

$$A_L = \frac{2L+1}{2R^L}\int_0^{\pi} V_o(\theta) P_L(\cos\theta)\cdot d(\cos\theta)$$

$$V_o(\theta) = K\cos(3\theta) = \sum_{L=0}^{\infty} A_L R^L P_L(\cos\theta)$$

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos$$
$$= \frac{8}{5}P_3(\cos\theta) - \frac{3}{5}P_1(\cos\theta).$$

هون كتبنا V_o بدلالة لجندر (Legendre polynomial).

الجهد على السطح عند $R = r$.

$$V(R,\theta) = \sum_{L=0}^{\infty} A_L R^L P_L(\cos\theta).$$

$$V(R,\theta) = \frac{8k}{5} P_3(\cos\theta) - \frac{3k}{5} P_1(\cos\theta).$$

$A_\ell = 0$ unless $\ell = 1$ or $\ell = 3$.

$$A_1 = \frac{-3k}{5R}, \quad A_3 = \frac{8k}{5R^3}$$

$$V(r,\theta) = \frac{8k}{5}\frac{r^3}{R^3} P_3(\cos\theta) - \frac{3k}{5}\frac{r}{R} P_1(\cos\theta).$$

$\boxed{r > R}$ $A_L = 0$ if $A_L \neq 0$ $\boxed{V \to \infty}$

$$V(r,\theta) = \frac{B_L}{r^{L+1}} P_L(\cos\theta).$$

$$V(R,\theta) = \frac{B_L}{R^{L+1}} P_L(\cos\theta) = \frac{8k}{5} P_3(\cos\theta) - \frac{3k}{5} P_1(\cos\theta).$$

$\boxed{B_L = 0}$ unless $\ell = 1$ or 3

$$B_1 = \frac{-3k}{5} R^2, \quad B_3 = \frac{8k}{5} R^4$$

$$V_{out}(r,\theta) = -\frac{3k}{5}R^2\frac{1}{r^2}P_1(\cos\theta) + \frac{8k}{5}\frac{R^4}{r^4}P_3(\cos\theta)$$

The charge density on sphere can be obtained using the boundary conditions for the electric field at boundary.

مثل كل مرة بنستخدم BCs تبعت $\vec{E}$ عشان نطلع كثافة الشحنة السطحية

$$\vec{E}_{r=R+} - \vec{E}_{r=R-} = \frac{\sigma(\theta)}{\varepsilon_0}\hat{r}.$$

SaRa.

$$\left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r=R+} - \left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r=R-} = \frac{-\sigma(\theta)}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{\partial V_{out}}{\partial r} = \left[\frac{6k}{5}\frac{R^2}{r^3}P_1(\cos\theta) - \frac{32k}{5}\frac{R^4}{r^5}P_3(\cos\theta)\right]_{r=R+}$$

$$= \frac{k}{5R}\left(6P_1(\cos\theta) - 32P_3(\cos\theta)\right)$$

أكيد مخك انفجر
سأحاول لملم بقايا
الانفجار
القادم
أعظم!!

$$\frac{\partial V_{in}}{\partial r} = \left[-\frac{3k}{5}\frac{1}{R}P_1(\cos\theta) + \frac{24}{5}k\frac{r^2}{R^3}P_3(\cos\theta)\right]_{r=R-}$$

$$= \frac{k}{5R}\left[-3P_1(\cos\theta) + 24P_3(\cos\theta)\right]$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r=R+} - \left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r=R-} = \frac{-\sigma(\theta)}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{k}{5R}\left(9\,P_1(\cos\theta) - 56\,P_3(\cos\theta)\right) = -\frac{\sigma(\theta)}{\varepsilon_0}$$

$$\sigma(\theta) = \frac{-k\,\varepsilon_0}{5R}\left[9\,P_1(\cos\theta) - 56\,P_3(\cos\theta)\right]$$

نسؤال جديد
وعكمه جديدة.

Q20) Suppose the potential $V_0(\theta)$ at the surface of a sphere is specified, and there is no charge inside or outside the sphere. Show that the charge density on the sphere is given by.

$$\sigma(\theta) = \frac{\varepsilon_0}{2R}\sum_{L=0}^{\infty}(2L+1)^2\,C_L\,P_L(\cos\theta)$$

$$C_L = \int_0^{\pi} V_0(\theta)\,P_L(\cos\theta)\,\sin\theta\,d\theta$$

هاد سؤال
اثبات حالة
عامة للسؤال
اللي قبل.

$$V_{inside} = V(r,\theta) = \sum_{L=0}^{\infty} A_L\,r^L\,P_L(\cos\theta)$$

$$V(R,\theta) = \sum_{L=0}^{\infty} A_L\,R^L\,P_L(\cos\theta) = V_0(\theta)$$

$$A_L = \frac{2L+1}{2R^L}\int_0^{\pi} V_0(\theta)\,P_L(\cos\theta)\,d(\cos\theta)$$

بحكيلك إذا كان
الجهد ع السطح
معروف وما كان
في شحنات لا جوا
ولا برا الكرة
فكثافة الشحنة
السطحية
راح يكون شكلها زي اللي معطيك
اياه في السؤال.

$V_{outside}$

هون بنوجد الجهد في الخارج

$$V(r,\theta) = \sum_{L=0}^{\infty} \frac{B_L}{r^{L+1}} P_L(\cos\theta).$$

$$V(R,\theta) = \sum_{L=0}^{\infty} \frac{B_L}{R^{L+1}} P_L(\cos\theta) = V_o(\theta).$$

$$B_L = \frac{2L+1}{2} R^{L+1} \int_0^{\pi} V_o(\theta) P_L(\cos\theta)\, d(\cos\theta).$$

هون بنستخدم الـ BCs بتعت $\vec{E}$

$E_{out} - E_{in} = \frac{-\sigma}{\varepsilon_o}$

وبنعوض بعد ما نشتق

الجهد برا والجهد جوا

بالنسبة لـ r.

$$\frac{\partial V_{out}}{\partial r} - \frac{\partial V_{in}}{\partial r} = \frac{-\sigma(\theta)}{\varepsilon_o}.$$

$$\left.\frac{\partial V_{out}}{\partial r}\right|_{r=R_+} = -\sum_{L=0}^{\infty} (L+1) \frac{B_L}{R^{L+2}} P_L(\cos\theta).$$

$$\left.\frac{\partial V_{in}}{\partial r}\right|_{r=R_-} = \sum_{L=0}^{\infty} L (A_L) R^{L-1} P_L(\cos\theta).$$

$$\left.\frac{\partial V_{out}}{\partial r}\right|_{r=R_+} - \left.\frac{\partial V_{in}}{\partial r}\right|_{r=R_-} = -\sum (\ell+1) \frac{B_L}{R^{L+2}} P_L(\cos\theta).$$

$$- \sum L A_L R^{L-1} P_L(\cos\theta)$$

$$= -\sum_{L=0}^{\infty} \left[\left(L A_L R^{L-1}\right) + \left(\frac{(L+1) B_L}{R^{L+2}}\right) \right] P_L \cos\theta$$

$$\sigma(\theta) = -\varepsilon_0 \left[\frac{\partial V_{out}}{\partial r} - \frac{\partial V_{in}}{\partial r} \right]$$

$$= \varepsilon_0 \sum_{L=0}^{\infty} \left[\left(\frac{(L+1) B_L}{R^{L+2}} + L A_L R^{L-1} \right) P_L(\cos\theta) \right]$$

$$= \varepsilon_0 \sum_{L=0}^{\infty} \left(\frac{(L+1)(2L+1) B_L}{2R^{L+2}} + \frac{L(2L+1)}{2R^L} R^{L-1} A_L \right) P_L(\cos\theta)$$

$$= \varepsilon_0 \sum_{L=0}^{\infty} \left(\frac{(L+1)(2L+1)}{2R^{L+2}} R^{L+1} + \frac{L(2L+1)}{2R^L} R^{L-1} \right) C_L P_L(\cos\theta)$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2R} \sum (2L+1)^2 C_L \, P_L(\cos\theta)$$

$$C_L = \int_0^{\pi} V_0(\theta) P_L(\cos\theta) \, d(\cos\theta)$$

لهون نكون خلصنا أمثلة عن spherical وراح ناخذ هلا عن cylindrical coordinates وهاي مهمة وبدها تركيز لأنه احتمال تيجي في الامتحان، وراح تلاقوا سؤال عنها في الفورمات

ومثل ما حكيت قبل، اذا شايف الكل طويل طول بالك أكثر منه!!

All The Best !

SaRa Jamal
2019

Q24) Solve Laplace's equation by separation of variables in cylindrical coordinates, assuming there is no dependence on Z (cylindrical symmetry). Make sure that you find all solutions to the radial equation. Does your result accomodate the case of an infinite line charge?

$$\frac{\partial V}{\partial Z} = 0$$

هلا بدنا كل معادلة لابلاس في Cylindrical coordinates بس لما تكون ما تعتمد ع Z يعني راح تصير Polar

$$\nabla^2 V = \frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial S}\left(S\frac{\partial V}{\partial S}\right) + \frac{1}{S^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0$$

راح نستخدم S بدل r عشان ما نخربش ع spherical

$$V(S,\varphi) = \mathcal{S}(S)\,\varnothing(\varphi)$$

$$\left[\frac{\varnothing(S)}{S}\frac{\partial}{\partial S}\left(S\frac{\partial \mathcal{S}(S)}{\partial S}\right) + \frac{\mathcal{S}(S)}{S^2}\frac{\partial^2 \varnothing}{\partial \varphi^2} = 0\right] \times \frac{S^2}{\varnothing\,\mathcal{S}(S)}$$

$$\underbrace{\frac{S}{\mathcal{S}(S)}\frac{\partial}{\partial S}\left(S\frac{\partial \mathcal{S}(S)}{\partial S}\right)}_{\lambda} + \underbrace{\frac{1}{\varnothing(\varphi)}\frac{\partial^2 \varnothing(\varphi)}{\partial \varphi^2}}_{-\lambda} = 0$$

$$\boxed{\lambda = -m^2}$$

$$\frac{1}{\varnothing(\varphi)}\varnothing'' = m^2 \Rightarrow \varnothing'' - m^2\varnothing = 0$$

$$\varnothing(\varphi) = Ae^{m\varphi} + Be^{-m\varphi}$$

(not periodic).

$$\frac{s}{S(s)} \frac{\partial}{\partial s}\left(s \frac{\partial S}{\partial s}\right) = \lambda = -m^2$$

$$s\left[s S'' + S'\right] = -m^2 S(s)$$

$$s^2 S'' + s S' + m^2 S = 0$$

$$S = s^k$$

$$k(k-1)\, s^2\, s^{k-2} + s\,(k)\, s^{k-1} + m^2 s^k = 0$$

$$k(k-1) + k + m^2 = 0$$

$$k^2 + m^2 = 0$$

$$k = \mp i m \quad \Rightarrow \quad S(s) = A e^{ims} + B e^{-ims}$$

1.. $\lambda = m^2$ هلا بدنا نشوف لما نكون $\lambda = m^2$

$$\phi'' + m^2 \phi = 0$$

$$\phi(\varphi) = C \cos(m\varphi) + D \sin(m\varphi).$$

periodic ($\checkmark$).

$$s^2 S'' + s S' + -m^2 S = 0 \qquad (S = s^k).$$

$$k(k-1) + k - m^2 = 0$$

$$k^2 - m^2 = 0$$

$$\boxed{k = \mp m}$$

$$S(s) = A s^{m} + B s^{-m}$$

حاول تستمتع!!

لأنه لسا ضايل كمان
شابتر داخل في
السكشن!!

$\lambda = 0$ هلا خلي نشوف لما $\lambda =$ صفر

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(s \frac{\partial S}{\partial s}\right) = 0$$

$$s \frac{\partial S}{\partial s} = \text{Const.} = a_0$$

$$\frac{\partial S}{\partial s} = \frac{a_0}{s} \Rightarrow S(s) = a_0 \ln(s) + b_0$$

$$S(s) = a_0 \ln(s) + b_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_m s^m + \frac{B_m}{s^m} \right]$$

$$\phi(\varphi) = C_m \cos m\varphi + D_m \sin m\varphi$$

$$V(s,\varphi) = a_0 \ln(s) + b_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(A_m s^m + \frac{B_m}{s^m} \right) \left(C_m \cos m\varphi + D_m \sin m\varphi \right) \right]$$

Q 26). A charge density $\sigma = a \sin(5\varphi)$ is glued over the surface of an infinite cylinder of radius R. Find the potential inside and outside the cylinder

هاد مثال
عل cylin.
شبه تبع الكرة
انه أعطاني
σ عالسطح وطالبه الجهد برا وجوا الاسطوانة (نق = R).

$$V(s,\varphi) = a_0 \ln(s) + b_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(A_m s^m + \frac{B_m}{s^m} \right) \left(C_m \cos m\varphi + D_m \sin m\varphi \right) \right]$$

inside $B_m = 0$, $a_0 = 0$ $\left(\text{if } \begin{matrix} B_m \neq 0 \\ a_m \neq 0 \end{matrix} \quad V \to \infty \text{ at } s = 0 \right)$

$$V_{inside}(s,\varphi) = b_{0_{in}} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(A_m s^m + \cancel{\frac{B_m}{s^m}} \right) \left(C_{m_{in}} \cos m\varphi + D_{m_{in}} \sin m\varphi \right) \right]$$

$$= b_{0_{in}} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[s^m \left(C_{m_{in}} \cos m\varphi + D_{m_{in}} \sin m\varphi \right) \right]$$

Outside

$A_m = 0$

$a_0 = 0$

لأنه لو ما صفروا بصير
الجهد يروح لـ ∞.

$$V(s, \varphi) = b_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{s^m} \left(F_m \cos m\varphi + G_m \sin m\varphi \right) \right]$$

$$b_{0\,out} = 0 \qquad (V \rightarrow 0 \text{ as } s \rightarrow \infty).$$

$$\sigma(\varphi) = -\varepsilon_0 \left[\left.\frac{\partial V_{out}}{\partial s}\right|_{s=R} - \left.\frac{\partial V_{in}}{\partial s}\right|_{s=R} \right]$$

$$\left.\frac{\partial V_{out}}{\partial s}\right|_{s=R} = \sum_{m=1}^{\infty} \left[-\frac{m}{R^{m+1}} \left(F_m \cos m\varphi + G_m \sin m\varphi \right) \right]$$

$$\left.\frac{\partial V_{in}}{\partial s}\right|_{s=R} = \sum_{m=1}^{\infty} \left[m R^{m-1} \left(C_m \cos m\varphi + D_m \sin m\varphi \right) \right]$$

$$\sigma(\varphi) = \varepsilon_0 \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(m R^{m-1} C_m + \frac{m}{R^{m+1}} F_m \right) \cos m\varphi + \left(m R^{m-1} D_m + \frac{m}{R^{m+1}} G_m \right) \sin m\varphi \right]$$

هون مقدرش اشرح كثير حكي لأنه الكل معادلات وبس فحاول تركز أكثر
في كل معادلة لتفهم شو صار وإذا فهمته أول مرة بتصير تمشي بسرعة
بالباقي. بس هون في كثير ثوابت ولازم نطلع العلاقات بينها فحاول
ركز أكثر في كل الخطوات من أولها لآخرها.

$\sigma(\varphi) = a \sin 5\varphi$

$C_m = F_m = 0 \qquad \forall m.$

$D_m = G_m = 0 \quad \forall m \quad \text{unless } m = 5.$

$$\sigma(\varphi) = a \sin 5\varphi = \varepsilon_0 \left[5R^4 D_5 + \frac{5}{R^6} G_5 \right] \sin 5\varphi$$

$$\frac{a}{\varepsilon_0} = 5R^4 D_5 + \frac{5}{R^6} G_5$$

A second relation between D_5 & G_5 can be obtained using the condition that the electrostatic potential is continuous at any boundary.

هون نستخدم انه الجهد دائماً متصل
مش مثل $\vec{E}$ عشان نطلع علاقة بين
D_5 و G_5.

$$V_{in}(R, \varphi) = V_{out}(R, \varphi)$$

$$b_{0\,in} + R^5 D_5 \sin 5\varphi = \frac{G_5}{R^5} \sin 5\varphi$$

$$b_{0\,in} = 0$$

$$R^{10} D_5 = G_5 \quad , \quad \frac{a}{\varepsilon_0} = 5R^4 D_5 + \frac{5}{R^6}(R^{10} D_5)$$

$$G_5 = \frac{a}{10\varepsilon_0} R^6 \qquad\qquad D_5 = \frac{a}{10\varepsilon_0} \frac{1}{R^4}$$

$$V_{in}(S,\varphi) = S^5 D_5 \sin(5\varphi) = \frac{a}{10\varepsilon_0}\frac{S^5}{R^4}\sin 5\varphi$$

$$V_{out}(S,\varphi) = S^{-5} G_5 \sin 5\varphi$$

$$V_{out} = \frac{a}{10\varepsilon_0}\frac{R^6}{S^5}\sin 5\varphi$$

^^

Q 43) A conducting sphere of radius $\underline{a}$, at potential V_0, is surrounded by a thin concentric spherical shell of radius $\underline{b}$ over which someone glued a surface charge $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos\theta$

a- Find the electrostatic potential in each region.

i) $r > b$

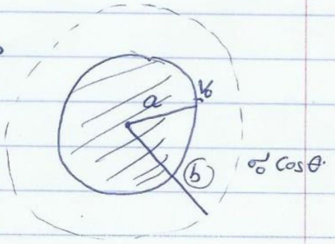
ii) $a < r > b$

SaRa Jamal

b- Find the induced surface charge $\sigma(\theta)$ on the conductor

c- What is the total charge of the system? check that your answer is consistent with the behavior of V at large $\underline{r}$.

هون رجعنا للـ spherical ، الحل طويل شوي أو بجوز كثير بس السؤال مهم وشامل .
بحكيلك عندك كرة موصلة (نق = a) الجهد على سطحها V_0
محاطة بقشرة كروية (نق = b) عليها كثافة شحنة
سطحية $\sigma(\theta)$ وطالبه عدة مطاليب في a ، b ، c .



$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right] P_l(\cos\theta)$$

هاد الحل العام اللي طلعناه قبل

inside the sphere $(B_m = 0)$.

جوا الكرة حكينا انه $B = 0$ فبصير الحل

$$V_{in}(r,\theta) = \sum_{L=0}^{\infty} A_L r^L P_L(\cos\theta).$$

$$V(a,\theta) = \sum_{L=0}^{\infty} A_L a^l P_L(\cos\theta).$$

$$V_0 = \sum_{L=0}^{\infty} A_L a^l P_l(\cos\theta).$$

$$V_0 P_0(\cos\theta) = \sum_{L=0}^{\infty} A_L a^l P_l(\cos\theta).$$

هاي المعادله بتبينلي انه A_m كلهم صفر ماعدا عند $m=0$

$$A_0 = \frac{V_0}{a^0}$$

$$V_{in} = V_0 P_0(\cos\theta) = V_0.$$

طبعاً هاي النتيجة نعرفها مسبقاً انه الجهد داخل موصل دفنس جهد السطح

Outside the shell $(A_l = 0)$.

هنا لازم نصفر A عشان لما r تكبر ما يروح $V \to \infty$.

$$V_{r>b}(r,\theta) = \sum_{L=0}^{\infty} \frac{B_{L\,out}}{r^{l+1}} P_L(\cos\theta).$$

سارة جمال جميل أبو زايد

In region between sphere & shell

في المنطقة بينهم

$$V_{a<r<b}(r,\theta) = \sum_{L=0}^{\infty} \left[A_{in} r^l + \frac{B_{in}}{r^{l+1}} \right] P_l(\cos\theta).$$

$$V(a,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_{in} a^l + \frac{B_{in}}{a^{l+1}} \right] P_l(\cos\theta) = V_0 P_0 \cos\theta$$

$$A_{in}\, a^{l} + \frac{B_{in}}{a^{l+1}} = V_0$$ $\boxed{l=0}$

⊛ at $r=b$ the potential is continuous. الجهد متصل

$$\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_{in}\, b^{l} + \frac{B_{in}}{b^{l+1}}\right) P_l(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_{out}}{b^{l+1}} P_l(\cos\theta).$$

$$A_{in}\, b^{l} + \frac{B_{in}}{b^{l+1}} = \frac{B_{out}}{b^{l+1}}$$

$$(b^{2l+1})\, A_{in} = B_{out} - B_{in}$$

The other boundary condition of V at $r=b$ is that it must produce $\sigma(\theta)$.

$$\sigma(\theta) = -\varepsilon_0 \left[\frac{\partial V_{out}}{\partial r} - \frac{\partial V_{in}}{\partial r}\right]_{r=b}$$

$$= \varepsilon_0 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l+1}{b^{l+2}} \left(B_{out} - B_{in}\right) + l\, A_{in}\, b^{l-1}\Big) P_l(\cos\theta)$$

$$= \sigma_0 \cos\theta = \sigma_0 P_1(\cos\theta)$$

$$\frac{l+1}{b^{l+2}}\left(B_{l\,out} - B_{l\,in}\right) + l A_{l_{in}} b^{l-1} = 0 \qquad l \neq 1$$

$$\frac{2}{b^{3}}\left(B_{1\,out} - B_{1\,in}\right) + A_{1_{in}} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \qquad l = 1$$

Substituting the relation between the various coefficients by applying the continuty condition we obtain.

$$\frac{l+1}{b^{l+2}} A_{in_l} b^{2l+1} + l A_{l_{in}} b^{l-1} = (2l+1) A_{l\,in} b^{l-1} = 0 \qquad l \neq 1$$

$$\frac{2}{b^{3}} A_{1_{in}} b^{3} + A_{1\,in} = 3 A_{1\,in} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \qquad l = 1$$

$$\Rightarrow A_{l_{in}} = 0 \qquad l \neq 1$$

$$A_{1_{in}} = \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0} \qquad l = 1$$

^^

بعد هاد السؤال
حابب أتمنالكم
التوفيق في
الامتحان

Using the values of $A_{in,m}$, we can show

$$\frac{L+1}{b^{L+2}}\left(B_{L\,out} - B_{L\,in}\right) = 0 \qquad l \neq 1$$

$$B_{1\,out} - B_{1\,in} = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} b^{3} \qquad l = 1$$

بس إذا شفت
توفيق ناديني
آخذ توقيعه!!
ههههه
^^

The boundary condition for V at $r=a$ shows that

$$B_{L\,in} = -A_{L\,in}\, a^{2L+1} = 0 \qquad L \geq 2.$$

$$B_{1\,in} = -A_{1\,in}\, a^3 = -\frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}\, a^3 \qquad \ell = 1$$

$$B_{0\,in} = a\left(V_0 - A_{0\,in}\right) = aV_0 \qquad \ell = 0$$

These values of $B_{in,L}$ immediately fix the values for $B_{out,L}$.

$$B_{out_L} = B_{in\,\ell} = 0 \qquad L \geq 2$$

$$B_{out\,1} = \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0} b^3 + B_{in,3} = \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}\left(b^3 - a^3\right) \qquad \ell = 1$$

$$B_{out,0} = B_{in_0} = aV_0 \qquad \ell = 0$$

$$V_{r>b}(r,\theta) = \frac{aV_0}{r} P_0(\cos\theta) + \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\left(b^3 - a^3\right) P_1(\cos\theta).$$

$$V_{a<r<b}(r,\theta) = \frac{aV_0}{r} P_0(\cos\theta) + \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}\left(r - \frac{a^3}{r^2}\right) P_1(\cos\theta)$$

حاول تطول بالك لسا هاد أول
فرع في السؤال

b) The charge density.

$$\sigma(\theta) = -\varepsilon_0 \left[\frac{\partial V_{out}}{\partial r}\bigg|_{r=a} - \frac{\partial V_{in}}{\partial r}\bigg|_{r=a^-} \right]$$

$$= -\varepsilon_0 \left[\frac{-V_0}{a} + \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \cos\theta \right] = \frac{\varepsilon_0 V_0}{a} (-\sigma_0 \cos\theta)$$

c) The total charge on sphere

$$Q_a = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sigma(\theta)\, a^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi.$$

$$= 2\pi a^2 \left[\frac{2\varepsilon_0 V_0}{a} - \sigma_0 \int_0^{\pi} \cos\theta \sin\theta \, d\theta \right]$$

$$= 4\pi \varepsilon_0 V_0 a$$

$Q_{total\ on\ shell} = 0$

يا ريته لو كل الأفرع
حلوم بسرعة
زي ها الفرعين

^ ^

$$\Rightarrow Q_{total} = Q_a = 4\pi a \varepsilon_0 V_0$$

The potential at large distances.

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_{tot}}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{4\pi a \varepsilon_0 V_0}{r} = \frac{a V_0}{r}$$

SaRa
Jamal
2019