Chapter 2

Electro.1

Be Happy

Be Happy

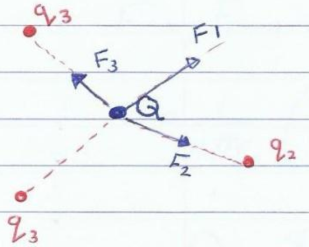
Sara Jamal

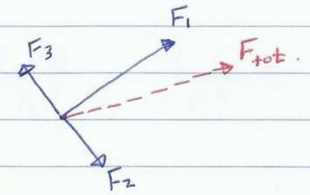
المجال الكهربائي الساكن (The Electrostatic field):

لحساب القوة التي تؤثر بها مجموعة من الشحنات q_1، q_2، q_3
على شحنة أخرى Q (شحنة الاختبار Test charge)
يمكننا استخدام "The principle of superposition".

وهذا المبدأ ينص على أن التفاعل بين أي شحنتين لا يتأثر أبداً بوجود الشحنات الأخرى.

إذن القوة المؤثرة على Q بواسطة q_1، q_2 و q_3 مساوٍ للجمع المتجهي للقوة $\vec{F_1}$ ، $\vec{F_2}$ ، $\vec{F_3}$.





القوة المؤثرة بواسطة جسم مشحون على جسم آخر مشحون تعتمد على المسافة الفاصلة بينهما ، على سرعتهما وعلى تسارعهما ، لكننا سندرس حالة خاصة وهي عندما تكون الشحنات ساكنة في مكانها.

والمجال الكهربائي "The electric field" الناشئ من شحنة ساكنة (مصدر شحنات ساكنة) يسمى "electrostatic field".

والمجال الكهربائي عند نقطة معينة هو متجه "Vector" مقداره يتناسب مع القوة الكلية المؤثرة على شحنة اختبار موضوعة عند تلك النقطة واتجاهه بنفس اتجاه القوة المؤثرة على شحنة اختبار موجبة.

المجال الكهربائي $\vec{E}$ المتولد من مجموعة من الشحنات يُعرَّف كما يلي

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}}$$

ملاحظة : شحنة الاختبار صغيرة بحيث لا تؤثر في توزيع مجموعة الشحنات الأخرى.

القوة المحصلة تساوي

$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \cdots$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 Q}{r_1^2}\hat{r}_1 + \frac{q_2 Q}{r_2^2}\hat{r}_2 + \frac{q_3 Q}{r_3^2}\hat{r}_3 + \cdots\right)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i^2}\hat{r}_i$$

إذن المجال الكهربائي الناشئ عن مجموعة من الشحنات

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i^2}\hat{r}_i$$

في معظم التطبيقات ، مجموعة الشحنات لا تكون منفصلة بل موزعة بشكل متصل "distributed continuously" على منطقة معينة

وهناك ٣ توزيعات مختلفة سنستخدمها :

$\boxed{1}$ Line charge λ : الشحنة لكل وحدة طول

$\boxed{2}$ Surface charge σ : الشحنة لكل وحدة مساحة

$\boxed{3}$ Volume charge ρ : الشحنة لكل وحدة حجم

لحساب المجال الكهربائي الناشئ عن هذا التوزيع من الشحنات علينا استبدال المجموع بتكامل :

$\boxed{1}$ for λ $$\vec{E}(p) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{Line} \frac{\hat{r}}{r^2} \lambda \, dL$$

$\boxed{2}$ for σ $$\vec{E}(p) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{surface} \frac{\hat{r}}{r^2} \sigma \, da$$

$\boxed{3}$ for ρ $$\vec{E}(p) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{Vol.} \frac{\hat{r}}{r^2} \rho \, d\tau$$

$\hat{r}$: متجه وحدة من المنطقة (مصدر الشحنات) الى النقطة P .

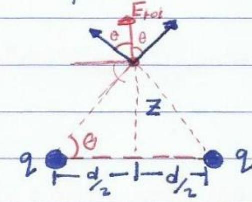
Exp) Problem 2.2

a Find the electric (magnitude & direction) a distance Z above the midpoint between two equal charges q a distance d apart. Check that your result is consistent with what you expect when $Z \gg d$.

b Repeat part $\underline{\underline{a}}$ only this time make the right-hand charge $-q$ instead of $+q$.

السؤال يطلب منا نحل ونوجد المجال الكهربائي الناشئ عن شحنتين بينهم مسافة d عند نقطة فوقهم على بعد مسافة Z

طبعاً من الواضح انه المركبات السينية راح تلغي بعضها فنضل بس المركبات الصادية اللي راح تجمع مع بعضها.



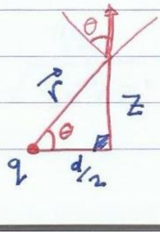
$$\vec{E}(p) = 2\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r^2}\,\hat{r}$$

$$= 2\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{(\frac{1}{4}d^2+Z^2)^2}\,\frac{Z}{\sqrt{\frac{1}{4}d^2+Z^2}}\;\hat{z}$$

$$= \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{q\,Z}{(\frac{1}{4}d^2+Z^2)^{3/2}}\;\hat{z}$$

طبعاً السؤال القوي ، من وين أجت $\frac{1}{(\frac{1}{4}d^2+Z^2)}$?!

جوابها بسيط



r : هي وتر المثلث قائم الزاوية

$\hat{r}$ هي $\sin\theta$ باتجاه $\hat{Z}$

هلا طلب منا كمان نختبر جوابنا لما تصير z أكبر بكثير من d

يعني $r = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}d^2 + z^2}} \approx \frac{1}{z}$

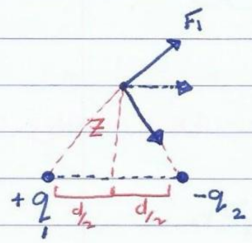
$$\vec{E}(p) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2qz}{\left(\sqrt{\frac{1}{4}d^2 + z^2}\right)^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2qz}{\left(\sqrt{z^2}\right)^3} \hat{z}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} 2q \frac{z}{z^3} \hat{z}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} (2q) \frac{1}{z^2} \hat{z}$$

بصير زي كأنه المجال الناشئ عن شحنة نقطية مقدارها $2q$.

$\boxed{b}$



هلا في الفرع الثاني بنلاحظ انه لو غيرنا الشحنة اللي عاليمين لسالبة بتصير القوة الثانية قوة تجاذب مع P.

هون راح تلغي المركبات الصادية بعضها وتضل المركبات السينية.

$$\vec{E}(p) = 2 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

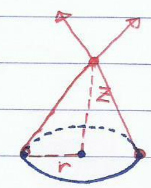
$$= \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{1}{4}d^2 + z^2}\right)^2} \cos\theta \ \hat{x}$$

$$= \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\left(\frac{1}{4}d^2 + z^2\right)} \frac{d/2}{\sqrt{\frac{1}{4}d^2 + z^2}} \hat{x}$$

Exp) Problem 2.5

Find the electric field a distance z above the centre of a circular loop of radius r which carries a uniform Line charge λ.

كل قطعة dl من الحلقة تبعد نفس المسافة عن P
لذلك مقدار المجال الكهربائي بالاتجاه السيني راح يلغي بعضه

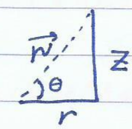


هلا مقدار المجال هو تكامل dE اللي بساوي

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dL}{r^2+Z^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}$$

بس مثل ما حكينا فوق انه المركبة السينية بتشطب.
عشان هيك راح نكامل لنحصل ع المركبة العمودية اللي باتجاه Z

$$dE_z = dE\ \cancel{co}\sin\theta$$



$$= dE \frac{Z}{\sqrt{r^2+Z^2}}$$

$$= \frac{\lambda dL}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Z}{(r^2+Z^2)^{3/2}}$$

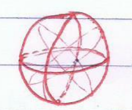
$$E = \int dE_z = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Z}{(r^2+Z^2)^{3/2}}\int dL$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Z}{(r^2+Z^2)^{3/2}}(2\pi r)$$

هلا $\lambda(2\pi r)$ نفسها الشحنة الكلية ع ring

$$\vec{E} = \frac{q Z}{4\pi\varepsilon_0 \; (r^2+Z^2)^{3/2}}$$

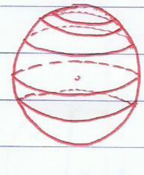
Exp) 2.7



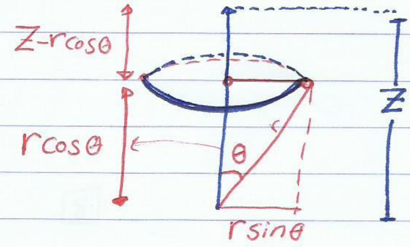
Find the electric field a distance Z from the centre of a spherical surface of radius R, which carries a uniform surface charge density. Treat the case $Z<R$ (inside) as well as $Z>R$ (outside). Express your answer in terms of the total charge q on the surface.

السؤال طالب منا انه نوجد المجال الكهربائي الناشئ عن سطح كروي (لازم ننتبه انه سطح كروي يعني قشرة كروية غير مملوءة من الداخل).

هلا عشان نحل السؤال راح نستخدم فكرة بسيطة وهي انه الكرة عبارة عن حلقات مركبة فوق بعضها وهيك بنقدر نستفيد من السؤال السابق

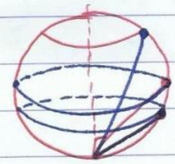


هلا لو أخذنا وحدة منهم بشكل عشوائي ويكون محورها Z



زاوية الحلقة θ وحُملها $d\theta$ (هلا السبب لوجود هاي الزاوية انها راح تحدد احنا بأي حلقة من الكرة يعني ارتفاع الحلقة ونصف قطرها) تذكروا انه احنا أخذنا حلقة وحدة عشوائياً تمثل جميع الحلقات اللانهائية العدد المكونة للكرة.

يعني تخيلوا هاد الشكل



① مساحة كل حلقة $dA = 2\pi r \sin\theta \, r \, d\theta$

$$= 2\pi r^2 \sin\theta \, d\theta$$

② الشحنة الكلية على هذه الحلقة $dq = \sigma \, dA$

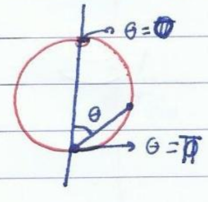
$$= \frac{1}{2} q \sin\theta \, d\theta$$

q: الشحنة الكلية على الكرة

هلا صار عنا حلقة وبدنا نوجد المجال الناشئ عنها وهاد أوجدناه في المثال السابق

$$dE = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r} \frac{Z - r\cos\theta \quad r\sin\theta \, d\theta}{(r^2 + Z^2 - 2Zr\cos\theta)^{3/2}}$$

المجال من الكرة هو تكامل المجال الناشئ عن كل حلقة يعني تكامل dE لما θ تروح من صفر $\leftarrow \pi$



$$E = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\int_0^{\pi}\frac{Z - r\cos\theta}{(r^2+Z^2-2Zr\cos\theta)^{3/2}}\, r\sin\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\int_0^{\pi}\frac{Z - r\cos\theta}{(r^2+Z^2-2Zr\cos\theta)^{3/2}}\, d(r\cos\theta).$$

Let $y = r\cos\theta$

$dy = -r\sin\theta\, d\theta$

$$E = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\int_{-r}^{r}\frac{Z - y}{(r^2+Z^2-2Z\underbrace{r\cos\theta}_{y})^{3/2}}\, dy$$

راح نعمل Trick بسيط عشان نحل هاد التكامل

لو لاحظنا انه

$$\frac{Z-y}{(r^2+Z^2-2Zy)^{3/2}} = \frac{-d}{dZ}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+Z^2-2Zy}}\right)$$

$$E = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\frac{-d}{dZ}\int_{-r}^{r}\frac{1}{\sqrt{r^2+Z^2-2Zy}}\, dy$$

$$= \frac{-1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\frac{d}{dZ}\left(\frac{\sqrt{r^2+Z^2-2Zy}}{-Z}\right)\Bigg|_{-r}^{r}$$

$$= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{r}\frac{d}{dZ}\left(\frac{(r+Z)-|r-Z|}{Z}\right)$$

Outside $(z > r) \Rightarrow |r-z| = z-r$

$$E = \frac{-1}{8\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r} \frac{d}{dz}\left[\frac{(r+\cancel{z}) - (\cancel{z}-r)}{z}\right]$$

$$= \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0} q \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \frac{1}{z^2}$$

هاد المجال نفس المجال الناشئ عن شحنة نقطية في مركز الكرة.

Inside $(z < r) \Rightarrow |r-z| = r-z$

$$E = \frac{-1}{8\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r} \frac{d}{dz}\left(\frac{\cancel{r}+z-(\cancel{r}-z)}{z}\right)$$

$$= \frac{-1}{8\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r} \frac{d}{dz}\left(\frac{-2\cancel{z}}{\cancel{z}}\right)$$

$$= 0$$

في الداخل المجال = صفر.

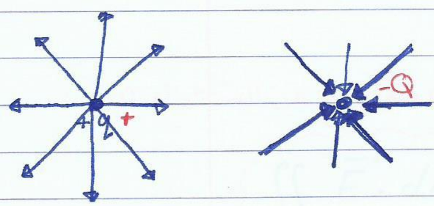
Divergence & Curl of Electrostatic Fields

المجال الكهربائي يمكن تمثيله باستخدام خطوط المجال. واتجاهها يكون بنفس الاتجاه الذي تتحرك فيه شحنة اختبار موجبة موضوعة في المجال.

كثافة خطوط المجال لكل وحدة مساحة تتناسب طردياً مع قوة المجال في تلك المنطقة.

طبعاً كلنا نعرف انه خطوط المجال بتطلع من الشحنة الموجبة وبتدخل عالسالبة.

خطوط المجال لا تتقاطع أبداً.



تدفق خطوط المجال الكهربائي خلال أي سطح "surface" يتناسب مع عدد الخطوط التي تمر خلال هذا السطح

لنفرض على سبيل المثال شحنة نقطية q موضوعة عند نقطة الأصل

التدفق الكهربائي ϕ_E خلال كرة (نق = r) مركزها نقطة الأصل يساوي

$$\phi_E = \oint_{sphere} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint \frac{q}{r^2} \cdot r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \frac{q}{\varepsilon_0}$$

لأن عدد خطوط المجال الناشئة من الشحنة q تعتمد فقط على مقدار الشحنة فإنه أي شكل عشوائي لسطح يحوي q بداخله يتعرض لنفس العدد من خطوط المجال.

⇐ التدفق الكهربائي خلال أي سطح مغلق يحوي q داخله $= \frac{q}{\varepsilon_0}$

وباستخدام "principle of superposition" يمكننا تعميم هذا الاستنتاج على أكثر من شحنة.

$$\phi_E = \oint_{surface} \vec{E}\cdot d\vec{a} = \sum_i \oint \vec{E}\cdot d\vec{a}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i$$

إذن لأي سطح عشوائي الشكل وأي توزيع من الشحنات.

$$\boxed{\iint_{surface} \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{Q_{enclosed}}{\varepsilon_0}}$$

Q_{enc} : هي الشحنة الكلية التي يحويها السطح بداخله.

وهذا ما نسميه قانون غاوس. ولأن المعادلة تحوي تكاملاً نقول انه بالشكل التكاملي Gauss' Law in integral form

لو استخدمنا divergence Theorem

$$\phi_E = \iint_{surface} \vec{E}\cdot d\vec{a} = \iiint_{Volume} (\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\, d\tau$$

$$Q_{enc} = \iiint_{Volume} \rho \, d\tau$$ ويمكننا أيضاً كتابة

$$\phi_E = \iiint_{Volume} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \, d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint \rho \, d\tau$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$ Gauss's Law In differential form.

هلا خلينا مثال بسيط نستخدم فيه قانون غاوس اللي وصلناله.

Exp) Pb 2.42)

If the Electric field in some Region is given (in spherical coordinates) by the expression

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{A\hat{r} + B \sin\theta \cos\varphi \, \hat{\varphi}}{r}$$

What is the charge density ρ ?

طبعاً بنقدر نحل السؤال بسهولة باستخدام قانون غاوس بشكله الأخير اللي وصلناله

بس لازم يكون الـ divergence بالـ (Spherical) والحمد لله انه هون مش ضروري تعرف تشتقه زي الماثماتيكل

شكون الـ (formula) معلومة بس طبق عليها

$$\rho = \varepsilon_0 \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \right)$$

$$= \varepsilon_0 \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 E_r \right) + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \, E_\theta \right) + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(E_\varphi \right) \right)$$

$$= \varepsilon_0 \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(A r \right) + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{B \sin\theta \cos\varphi}{r} \right) \right)$$

$$\rho = \varepsilon_0 \frac{A}{r^2} - \varepsilon_0 \frac{B}{r^2} \sin\varphi$$

The Curl of E. field

لو فرضنا انه عندنا توزيع شحنات $\rho(r)$. المجال الكهربائي
عند نقطة P ناشئ عن توزيع الشحنات هذا ، يساوي

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\Delta\hat{r}}{(\Delta r)^2}\, \rho(\vec{r}\,')\, d\tau'$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}\,'$$

The curl of E

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \vec{\nabla} \times \frac{\Delta\hat{r}}{(\Delta r)^2}\, \rho(\vec{r}\,')\, d\tau'$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{\Delta\hat{r}}{(\Delta r)^2}\right) = 0 \qquad \forall \text{ vectors.}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

يعني دائماً $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ يساوي صفر.

Application of Gauss' Law

على الرغم من أن قانون غاوس صحيح دائماً إلّا أنه أداة مفيدة فقط عندما يكون هنالك تماثل في المسألة (symmetry).

1) إذا كان لدي توزيع الشحنات .Spherical sym نستخدم قانون غاوس مع كرات متحدة المركز كأسطح غاوسية.

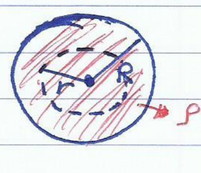
2) إذا كان لدي توزيع الشحنات Cylindrical symmetry نستخدم قانون غاوس مع اسطوانات متحدة المركز (مشتركة المركز مع توزيع الشحنات).

3) إذا كان لدي توزيع الشحنات plane symmetry نستخدم قانون غاوس مع pill boxes كأسطح غاوسية.

وهلا راح ناخذ أمثلة توضح المقصود:

Exp Pb 2.12) Use Gauss's Law to find the electric field inside a uniformly charged sphere (charge density ρ) of radius R.

من الواضح انه في Spherical symmetry يعني سطح غاوس راح يكون كرة مركزها



نفس مركز الكرة المشحونة ونصف قطرها r.

$(R > r)$

$$\phi_E = \iint \vec{E} \cdot d\vec{a} = 4\pi r^2 E(r).$$

$$Q_{enc} = \rho V_{enc} = \rho \left(\frac{4\pi}{3} r^3 \right)$$

عشان نطلع Q_{enc} بنضرب كثافة الشحنة بحجم كرة غاوس (نق=r).

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$E(r)\,(4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$$

$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$$

Exp) 2.14 Find the electric field inside a sphere which carries a charge density proportional to the distance from origin $\rho = kr$, for some const. k.

هاد السؤال بختلف عن اللي قبله انه كثافة الشحنة الحجمية غير منتظمة وعشان نطلع Q_{enc} ما بزبط نضرب ρV على طول لازم نكامل $\iiint \rho \, d\tau$ ، بس بعدها اكل نفس السؤال اللي قبل

$$\emptyset = \iint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$E(r)\, 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint \rho \, d\tau$$

$$E\,(4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r} k r' \, r'^2 \sin\theta \, dr' \, d\theta \, d\varphi$$

$$E\,(4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0} \, 2\pi k \int_0^{\pi}\int_0^{r} r'^3 \sin\theta \, dr' \, d\theta$$

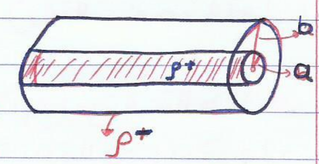
$$= \frac{1}{\varepsilon_0} \, 2\pi k \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{r} r'^3 \, dr'$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0} \, 2\pi k \left[-\cos\theta \Big|_0^{\pi} \right] \frac{r'^4}{4} \Big|_0^{r}$$

$$= \frac{2\pi k}{\varepsilon_0} \left(-(-1-1) \right) \frac{r^4}{4}$$

$$E\,(4\pi r^2) = \frac{\pi k}{\varepsilon_0} r^4 \Rightarrow E(r) = \frac{1}{4\varepsilon_0} k r^2$$

Exp) 2.16 A long coaxial cable carries a uniform (positive) volume charge density ρ on the inner cylinder (radius a), and a uniform surface charge density on the outer cylinder shell (radius b). The surface charge is negative & of just the right magnitude so that the cable as a whole is neutral. Find the electric field in each of the three regions (1) inside the inner cylinder ($r<a$) (2) between the cylinders ($a<r<b$), (3) outside the cable ($b<r$).



في عنا cable مكون من اسطوانتين جوا بعض ، الاسطوانة اللي جوا بتحمل كثافة شحنة حجمية مقدارها ρ^+ والاسطوانة اللي برا عليها شحنات سالبة بحيث تعادل الموجبة اللي في الداخل.

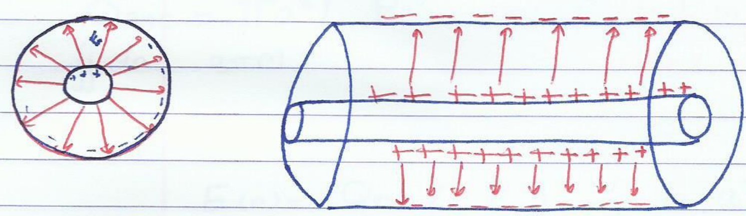
ملاحظة) إذا عادلت الشحنات السالبة ، الشحنات الموجبة اللي جوا مش معناته انه الكثافة الحجمية برا (ρ^-) لا ، لأنه المقصود انه كمية الشحنة $Q^+ = Q^-$ لكن في كل حالة تتوزع الشحنة على حجم مختلف $\rho^-_{out} = \frac{Q^-}{V_{out}}$.

المهم خلينا نرجع لحل السؤال ، هون بدنا نستخدم Gauss's Law بس بـ cylindrical coordinates . راح نستخدم اسطوانه قطرها r كسطح غاوس.

طبعاً r راح يختلف كل مرة (مرة راح يكون $b<r$ يعني اسطوانه أكبر من الكابل) . ومرة راح يكون $a<r<b$ ومرة $a>r$.

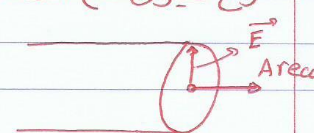
خلينا نبلش وحدة وحدة.

بس قبل ما ناخذ الحالات خلينا نشوف كيف اتجاه المجال الكهربائي داخل الاسطوانتين .



الخطوط تبعت المجال راح تطلع من الشحنات الموجبة وتدخل ع السالبة يعني المجال راح يكون من الاسطوانة الصغيرة للكبيرة (باتجاه نصف القطر).

معناته التدفق راح يكون ع المساحة الجانبية للاسطوانة ومش راح يكون ع القاعدتين لأنه اتجاه مساحتهم عمودي ع اتجاه المجال



هلا راح نبلش بكل منطقة لحال

$r<a$

ناخذ اسطوانه داخل الاسطوانة الصغيرة ونستخدم قانون التدفق

$$\phi = \iint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

① $\iint da = 2\pi r L$

② $Q_{enc} = \rho V = \rho(\pi r^2 L)$

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$E\,(2\cancel{\pi} r \cancel{L}) = \frac{\rho \cancel{\pi} r^{\cancel{2}} \cancel{L}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}}$$

$a<r<b$

$Q_{enc} = \pi a^2 L \rho$

$\iint da = 2\pi r L$

هون بناخذ حجم الاسطوانة الصغيرة تبعت ال Cable

$$E(r) = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2\pi r L}\right) = \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{a^2}{r}\rho$$

$b<r$

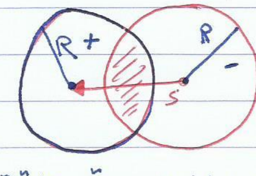
$Q_{enc} = 0$

$$E = 0$$

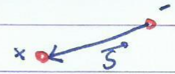
Exp) Pb 2.18 Two spheres of radius R & carrying uniform charge densities of ρ^+ & ρ^-, respectively, are placed so that they ~~are~~ partially overlap. Call the vector from the negative centre to the positive $\vec{s}$. Show that the field in the region of overlap is const. & find its value.

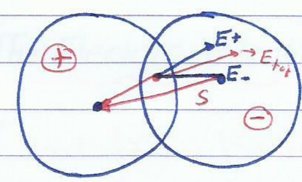
السؤال بحكي انه عنا كرتين كل وحدة عليها كثافة شحنة عكس الثانية ρ^+ و ρ^- بس نفس المقدار. حطيناهم جنب بعض بحيث انهم تداخلوا جزئياً. بدنا نحسب المجال الكهربائي في منطقة التداخل.

راح نعرف متجه $\vec{s}$ من مركز السالبة للموجبة



بعرف انه الرسمة معاقة !!





عشان نحسب المجال الكلي راح نستخدم (principle of superposition)
يعني المجال الكلي راح يكون حاصل الجمع المتجهي للمجالين

المجال داخل الكرة حسبناه في سؤال سابق ويساوي $\boxed{\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r}$

و r هو البعد عن المركز .

البعد عن مركز السالبة r_- والبعد عن مركز الموجبة r_+ ، إذن $\vec{r}_- = \vec{r}_+ + \vec{s}$

$$-\vec{s} = \vec{r}_+ - \vec{r}_-$$

$$\boxed{\vec{E}_{tot} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\vec{r}_+ - \vec{r}_-\right)}$$

$$= \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(-\vec{s}\right)$$

$$E_- = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(r_-)$$

$$E_+ = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(r_+) .$$

The Electric Potential

أثبتنا سابقاً انه $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ = صفر وهاد الشرط بدلنا انه ممكن نكتبه $\vec{E}$ على شكل $(-\vec{\nabla} V)$ يعني gradiant of scalar potential

$\vec{V}$ بنسميه electric potential . ويعرف $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

$$\int_a^b \vec{E} \cdot dl = -\int_a^b \vec{\nabla} V$$

$$\Rightarrow \int_a^b \vec{\nabla} V \cdot d\vec{l} = V(b) - V(a)$$

$$= -\int_a^b \vec{E} \cdot dl$$

لو أخذنا انه تكون a نقطة مرجع عندها الجهد صفر

$$V(b) = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

اختيار a كان عشوائي ، لو غيرناها بصير

$$V'(b) = -\int_{a'}^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_{a'}^a \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= K + V(b)$$

لكن لو جبنا ناخذ gradiant لـ V' عشان نوجد E راح يصفر $\vec{\nabla} K$ وبالتالي راح يطلع نفس ∇V اللي فوق بنستنتج انه بغض النظر عن المرجع اللي أخذناه راح يضل المجال الكهربائي نفسه .

والمهم هو فرق الجهد (ΔV) وليس V نفسها .

المرجع الأكثر شيوعاً هو ∞ حيث نفرض أن $V(\infty)=0$.

$$V(b) = -\int_{\infty}^{b} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

وحدة الجهد فولت $V = \frac{\text{نيوتن.م}}{\text{كولوم}}$

Exp) One of these is an impossible electrostatic field. which one ?

$\boxed{1}$ $\vec{E} = xy\,\hat{i} + 2yz\,\hat{j} + 3xz\,\hat{k}$

$\boxed{2}$ $\vec{E} = y^2\,\hat{i} + (2xy + z^2)\,\hat{j} + 2yz\,\hat{k}$.

بسيطة !! عشان نعرف أي واحد فيهم بزبط يكون مجال كهربائي بناخذ $(\vec{\nabla}\times)$

$$\vec{\nabla}\times E_1 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & 2yz & 3xz \end{vmatrix} = \hat{i}(0-2y) - \hat{j}(3z-0) + \hat{k}(0-x)$$

$$= -2y\,\hat{i} - 3z\,\hat{j} - x\,\hat{k}$$

$$\neq 0$$

إذن مستحيل يكون مجال كهربائي

خلينا نشوف الثاني

$$\vec{\nabla}\times \vec{E_2} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & 2xy+z^2 & 2yz \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(2z-2z) - \hat{j}(0-0) + \hat{k}(2y-2y)$$

$$= 0 \quad \checkmark$$

هلا مثل ما حكينا انه كل متجه $(\vec{\nabla} \times)$ تبعه = صفر بقدر أوجد الـ V (Scalar potential).

والطريقة بتكون كالتالي : بختار أي مسار وبكامل $\int \vec{E} \cdot dl$

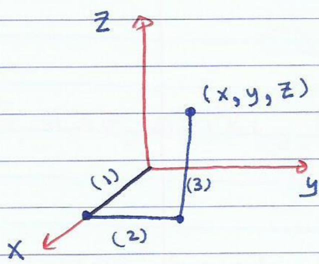
وما بتفرق المسار بين النقطتين a و b

لأنه المفروض تطلع نفس القيمة للتكامل

⇐ تذكروا انه لما بدنا نعرف إذا القوة محافظة أو لا كنا ناخذ $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ وإذا طلع صفر بتكون قوة محافظة يعني قيمة الشغل ما تعتمد ع المسار.

هون بنبدل $\vec{F}$ بـ E والشغل بـ V.

لو أخذنا المسار بين النقطة a(0,0,0) والنقطة b(x_0, y_0, z_0).



$$d\vec{l} = dx\, i + dy\, j + dz\, k$$

على المسار (1)

$y = z =$ صفر

x: صفر ← x_0

$dl = dx\, i$

$$-\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int (y^2 i + (2xy + z^2) j + 2yz\, k) \cdot dx\, i$$

$$= \int y^2\, dx = 0$$

على المسار (2) $x = x_0$ $z =$ صفر

y: صفر ← y_0

$$-\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int (2xy + z^2) \cdot dy = \int_0^{y_0} 2x_0 y\, dy$$

$$= 2x_0 \frac{y^2}{2} \Big|_0^{y_0}$$

$$= -x_0 y_0^2$$

عالمسار (3)

$y = y_0$

$x = x_0$

Z : صفر ← Z_0

$$-\int \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_0^{Z_0} 2yz\ dz = 2y_0 \frac{Z^2}{2}\Big|_0^{Z_0}$$

$$= 2y_0 \frac{Z_0^2}{2}$$

$$= -y_0 Z_0^2$$

$$V = -(yz^2 + xy^2)$$

هلا هاد الجهد مهم كتير وسهل علينا كتير بالأنه كمية قياسية مش متجهة مثل المجال الكهربائي.

يعني إذا بدي أوجد المجال الكلي عند نقطة ما راح اضطر أجمع متجهات

$$\vec{E}_{tot} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \cdots$$

أما الجهد الكهربائي فقط جمع جبري

$$V_{tot} = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots$$

Exp) Suppose the electric potential is given by the expression $V(r) = A \frac{e^{-\lambda r}}{r}$. Find the Electric field $\vec{E}(r)$ the charge density $\rho(\vec{r})$ & the total charge Q.

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = \frac{-\partial}{\partial r}\left(A \frac{e^{-\lambda r}}{r}\right)\hat{r}$$

$$= \left(\lambda A \frac{e^{-\lambda r}}{r} + A \frac{e^{-\lambda r}}{r^2}\right)\hat{r}$$

هون استخدمنا الـ (gradient) في spherical

أما $\rho(r)$ بنستخدم قانون غاوس (differential form)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho(r)}{\varepsilon_0}$$

$$\rho(\vec{r}) = \varepsilon_0 \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{E}\right]$$

$$= \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \left(A\lambda \frac{e^{-\lambda r}}{r} + A \frac{e^{-\lambda r}}{r^2}\right)$$

$$= \varepsilon_0 A \left[\vec{\nabla} \cdot (\lambda r + 1) e^{-\lambda r} \frac{\hat{r}}{r^2}\right]$$

$$= \varepsilon_0 A \left[(1+\lambda r) e^{-\lambda r} \left(\vec{\nabla} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2}\right) + \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot \vec{\nabla}\left((1+\lambda r) e^{-\lambda r}\right)\right]$$

$$= \varepsilon_0 A \left[4\pi (1+\lambda r) e^{-\lambda r} \delta^3(r) - \lambda^2 \frac{e^{-\lambda r}}{r}\right]$$

$$= \varepsilon_0 A \left[4\pi \delta^3(\vec{r}) - \lambda^2 \frac{e^{-\lambda r}}{r}\right]$$

$$Q_{tot} = \iiint \rho(\vec{r})\, d\tau$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r} \rho\, r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$= 2\pi\,(2)\,\varepsilon_0 A \int_0^{\infty} \left(4\pi\,\delta^3(\vec{r}) - \frac{\lambda^2}{r} e^{-\lambda r}\right) r^2\, dr$$

$$= 4\pi\varepsilon_0 A \left[\int_0^{\infty} 4\pi\,\delta^3(\vec{r})\, r^2\, dr - \int_0^{\infty} r\lambda^2 e^{-\lambda r}\, dr\right]$$

$$= -4\pi\varepsilon_0 A \int_0^{\infty} r\lambda^2 e^{-\lambda r}\, dr$$

بنقدر نحل التكامل بـ (Trick) بسيط

$$\int_0^{\infty} r e^{-\lambda r}\, dr = \frac{-d}{d\lambda}\int_0^{\infty} e^{-\lambda r}\, dr$$

$$= \frac{-d}{d\lambda}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$Q_{tot} = -4\pi\varepsilon_0 A \lambda^2 \int_0^{\infty} r e^{-\lambda r}\, dr$$

$$= -4\pi\varepsilon_0 A \lambda^2 \left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

$$= -4\pi\varepsilon_0 A$$

ولإيجاد V

$$\rho(\vec{r}) = \varepsilon_0 \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(r) \right] = \varepsilon_0 \left[\vec{\nabla} \cdot -\vec{\nabla} V \right]$$
$$= \varepsilon_0 \nabla^2 V$$

$$\nabla^2 V = \frac{-\rho}{\varepsilon_0}$$ Poisson's Equation

وإذا كنا في منطقة ما فيها شحنات (ρ = صفر) بصير عنا معادلة لابلاس:

$$\nabla^2 V = 0$$

وهاي المعادلة راح نتعلم كيف نحلها في الشابتر القادم.

حكينا قبل انه عشان أوجد V عند نقطة، بجمع جميع الجهود الناشئة عن كل الشحنات في المنطقة.

$$V_{tot}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n} V_i(\vec{r})$$

V_i: هو الجهد الناشئ عن الشحنة q_i.

الشحنة النقطية q_i إذا وضعناها عند نقطة الأصل راح تعمل جهد V_i

$$V_i(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\infty}^{r} \frac{q_i}{r'^2} dr'$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{r}$$

بشكل عام ، q_i بتكونش في الـ (origin) بتكون على بعد $\vec{r_i}$
فيصير الجهد الناشئ عنها عند نقطة تبعد $\vec{r}$ عن الـ (origin)
يساوي :

$$V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r'}|}$$

وإذا كان عنا مجموعة شحنات

$$V_{tot} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r_i}|}$$

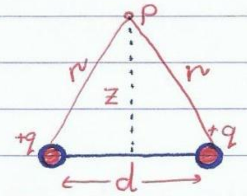
وعشان نحسب الجهد الناشئ عن توزيع متصل من الشحنات
بنبدل الـ (summation , Σ) بتكامل $\int$.

1. Line charge λ : $V_{tot} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{line} \frac{\lambda}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \, dl'$

2. Surface charge σ : $V_{tot} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint \frac{\sigma}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \, da'$

3. Volume charge ρ : $V_{tot} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\rho}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \, d\tau'$

Exp) Using the general expression for V in terms of ρ find the potential at a distance z above the centre of the charge distributions of Fig. In each case compute $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$.



$\vec{r} = \vec{r}_i - \vec{r}'$

$$V_{total} = V_1 + V_2$$

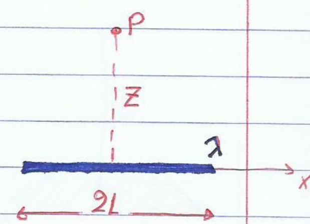
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_1} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_2}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{(\frac{1}{2}d)^2 + z^2}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{(\frac{1}{2}d)^2 + z^2}}$$

$$= \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(\frac{1}{2}d)^2 + z^2}}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(\frac{1}{2}d)^2 + z^2}}\right)\hat{k}$$

$$= \frac{2qz}{4\pi\varepsilon_0\left(\sqrt{\frac{1}{4}d^2 + z^2}\right)^3}\hat{k}$$



اعتبر انك أخذت قطعة صغيرة من القضيب اللي عليه الشحنات (dx) ، مقدار الشحنة عليها $= \lambda dx$
و~~المجال~~ الجهد اللي راح يكون منها dV

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda dx}{\sqrt{x^2+z^2}}$$

وراح يكون الجهد الكلي هو تكامل dV من $x = -L$ إلى $x = L$

$$V = \int_{-L}^{L} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda dx}{\sqrt{x^2+z^2}}$$

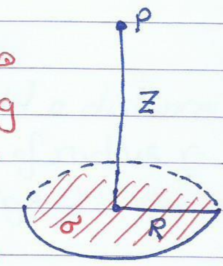
$$V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \left[\ln\left(\sqrt{x^2+z^2} + x\right) \right]_{-L}^{L}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \left[\left(\ln\left(\sqrt{L^2+z^2} + L\right) - \ln\left(\sqrt{L^2+z^2} - L\right) \right] \right.$$

$$E_z = \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \left[\ln\left(\sqrt{L^2+z^2} + L\right) - \ln\left(\sqrt{L^2+z^2} - L\right) \right]$$

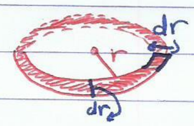
$$= \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{\frac{z}{\sqrt{L^2+z^2}}}{\sqrt{L^2+z^2} + L} - \frac{\frac{z}{\sqrt{L^2+z^2}}}{\sqrt{L^2+z^2} - L} \right]$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2L}{z\sqrt{L^2+z^2}}$$



هون بدنا نحل لـ Disk ، بس راح نستخدم ~~xxx~~
ring قطره r وسمكه dr ونحكي انه disk مكون
من عدد لا نهائي من هدول الـ ring ،
يعني بنوجد الجهد الناشئ عن ring واحد
وبنكامل من r = صفر ← R = r .

هلا كمية الشحنة على ring بتساوي



$$dq = \sigma \, dA$$
$$= \sigma \left[\pi (r+dr)^2 - \pi r^2 \right]$$
$$= 2\pi \cdot \sigma \cdot r \, dr$$

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{\sqrt{r^2+Z^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+Z^2}}$$

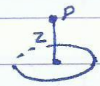
$$V = \frac{1}{2\varepsilon_0} \sigma \int_0^R \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+Z^2}}$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \sqrt{R^2+Z^2} - Z .$$

$$E_Z = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{\partial}{\partial Z} \left[\frac{\partial}{\partial Z} \sqrt{R^2+Z^2} - Z \right]$$

$$= \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0} \left[\frac{Z}{\sqrt{R^2+Z^2}} - 1 \right]$$

Exp)Pb 2.5 Find the electric field a distance z above the centre of a circular loop of radius r which carries a uniform line charge λ.



الشحنة الكلية على ring

$$Q = 2\pi R \lambda$$

إذن الجهد الكلي

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2\pi\lambda R}{r} = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0} \frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

$$E_z = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0} \frac{Rz}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

نفس النتيجة اللي حصلنا عليها في سؤال سابق في بداية الشابتر.

من خلال دراسة هاد الشابتر تعرفنا على ٣ كميات أساسية في الكهرباء السكونية (electrostatic)

1. ρ (كثافة الشحنة)
2. $\vec{E}$ (المجال الكهربائي)
3. V (الجهد الكهربائي).

إذا عرفنا وحدة منهم بنقدر نعرف الباقيات

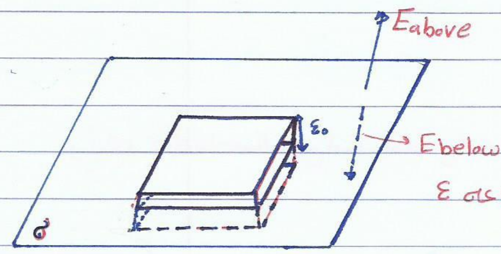
Known ↓	ρ	$\vec{E}$	V
ρ		$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\hat{r}}{r^2}\rho\, d\tau$	$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho}{r}\, d\tau$
$\vec{E}$	$\rho=\varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$		$V=-\int\vec{E}\cdot d\vec{l}$
V	$\rho=-\varepsilon_0\nabla^2 V$	$\vec{E}=-\vec{\nabla}V$	

هلا بدنا نناقش موضوع صغير بخصوص continuty تبعت $\vec{E}$ و P .

بحكولك انه $\vec{E}$ و P مش ضروري يكونوا continuous
"إذا مش مصدق اشتق" !!

خلينا نشوف كيف هالحكي ممكن يكون صحيح !!

افرض عندك صفيحة عليها كثافة شحنة σ ، العلاقة بين المجال الكهربائي $\vec{E}$ فوق الصفيحة وتحتها بنوجدها باستخدام قانون غاوس .



بما أنه في plane sym.

راح نستخدم box اللي يكون ارتفاعه ε نصه فوق ونصه تحته

التدفق الكهربائي خلال السطح تبع الـ box لما (ε→0) lim

$$\phi_E = \iint_{surface} \vec{E}\cdot d\vec{a} = \left(E_{\perp above} - E_{\perp below}\right)A$$

$E_\perp$ هي المركبة العمودية للمجال

$$\phi_E = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

$$\left(E_{\perp above} - E_{\perp below}\right)A = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}A$$

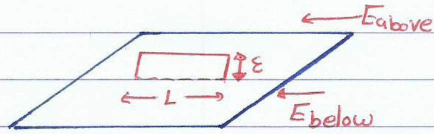
$$E_{\perp above} - E_{\perp below} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

يعني المركبة العمودية فوق ≠ المركبة العمودية تحت

بس المركبة الموازية للسطح متصلة $E_{\parallel_{above}} = E_{\parallel_{below}}$

وهاي بنحسبها بأنه نعمل $\underset{Integral}{\text{line}}$ حول مستطيل (حلقة مستطيلة)

طولها L وارتفاعها ε



$$\int \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int \vec{E}_{\parallel_{above}} \cdot d\vec{l} + \int \vec{E}_{\parallel_{below}} \cdot d\vec{l}$$

$$= \left(E_{\parallel_{above}} - E_{\parallel_{below}}\right) L$$

وزي ما بنعرف انه $\vec{\nabla}\times\vec{E}$ = صفر مثل القوى المحافظة يعني تكاملها على مسار مغلق = صفر.

$$\int_a^a \vec{E}\cdot dl = 0 = \left(E_{\parallel_{above}} - E_{\parallel_{below}}\right) L$$

$$\Rightarrow E_{\parallel_{below}} = E_{\parallel_{above}}$$

هاد الحكي ممكن نختصره بمعادلة وحدة

$$\vec{E}_{above} - \vec{E}_{below} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$$

$\hat{n}$: هو متجه وحدة عمودي على السطح باتجاه أعلى المنطقة.

⊗ الجهد الكهربائي متصل عبر أي boundary

$$V_{above} - V_{below} = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$V_{above} = V_{below}$$

Exp) Pb 2.30 (a) check that the results of examples 4 & 5 in book are consistent with the boundary conditions for $\vec{E}$.

مثال ٤ بالكتاب كان عن ايجاد المجال ~~الكهربائي~~ من صفيحة لانهائية تحمل كثافة شحنة سطحية (σ).

وكان المجال عمودي عالصفيحة ويساوي

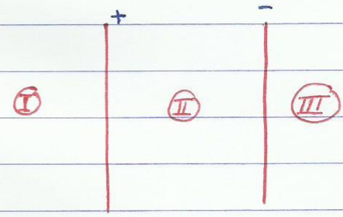
$$\vec{E}_{above} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k}$$

$$\vec{E}_{below} = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k}$$

$$\vec{E}_{above} - \vec{E}_{below} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{k} = \frac{\sigma_{sheet}}{\varepsilon_0}\hat{k}$$

وهذا يتناسب مع boundary conditions تبعت $\vec{E}$.

أما مثال 5)



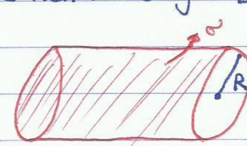
$$E_{I} = E_{III} = 0$$

$$\vec{E}_{II} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{i}$$

$$\vec{E}_{II} - \vec{E}_{I} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{i} = \frac{\sigma_{left}}{\varepsilon_0}\hat{i}$$

$$\vec{E}_{III} - \vec{E}_{II} = \frac{-\sigma}{\varepsilon_0}\hat{i} = \frac{\sigma_{right}}{\varepsilon_0}\hat{i}$$

(b) Use Gauss's Law to find the field inside & outside a long hollow cylindrical tube which carries a uniform surface charge σ. Check that your results are consistent with the boundary conditions for $\vec{E}$.



السؤال بده نوجد المجال داخل وخارج اسطوانة مجوفة تحمل كثافة شحنة سطحية σ. ونفحص هل $\vec{E}$ يحقق boundary conditions.

جوا الاسطوانه فش شحنات ⇐ $\vec{E} = 0$

برا الاسطوانه بنستخدم قانون غاوس

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(2\pi r L) = \frac{\sigma(2\pi R L)}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R}{r}\hat{r}$$

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R}{r}\,\hat{r}}$$ عندما $R < r$

أما على سطح الاسطوانة $(R = r)$

$$E_{out}(r) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\hat{r}$$

$$E_{out} = E_{inside} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\hat{r}$$

(c) check that the result of example 7 is consistent with the B.Cs for V.

الجهد الكهربائي الناشئ عن قشرة كروية مشحونة

$$V_{out}\Big|_{z=R} = \frac{R^2\sigma}{\varepsilon_0 R} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$$

$$V_{in}\Big|_{z=R} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$$

$$V_{out} = V_{in}$$

Work & Energy in Electrostatic

تخيل إنك حاطط شحنة q_1 عند نقطة الأصل وإنه في شحنة ثانية q_2 جاي من ∞ لنقطة تبعد عن origin مقدار $\vec{r_2}$.

خلينا نفرض انه الشحنة q_1 مش راح تتحرك لما تقترب عليها q_2، إذن القوة المؤثرة على q_2 بواسطة q_1

$$\vec{F}_{12} = q_2 \vec{E}_1$$

$\vec{E_1}$: المجال الكهربائي الناشئ عن q_1.

عشان نحرك q_2 لازم نأثر بقوة معاكسة لـ $\vec{F}_{12}$، لذلك الشغل الكلي اللازم لنقل q_2 من ∞ لـ r_2 بيساوي

$$W = -\int_{\infty}^{r_2} \vec{F}_{12} \cdot d\vec{l}$$

$$= -\int_{\infty}^{r_2} q_2 \vec{E}_1 \cdot d\vec{l}$$

$$= q_2 V_1(\vec{r_2})$$

$V(r_2)$ هو الجهد الناشئ عن q_1 عند النقطة r_2.

واحنا نعرف انه الجهد الناشئ عن شحنة نقطية $= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$

بصير الشغل بساوي

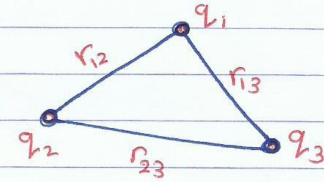
$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_2}$$

هاد هو الشغل اللازم لصنع نظام مكون من شحنتين نقطيتين ويسميه electrostatic potential energy للنظام.

وطاقة أي نظام مكون من أكثر من شحنتين بنقدر نوجدها بنفس الطريقة باستخدام superposition principle .

مثلاً لو نظام مكون من ٣ شحنات

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right]$$



وإذا كان عنا n من الشحنات

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\frac{q_j q_i}{r_{ij}}$$

$j=i+1$ بضمنلنا انه كل pair نعد مرة وحدة يعني مش لازم أخذ $q_1 q_2$ بعدها آخذ $q_2 q_1$ لأنهم نفس الاشي .

ممكن نكتب W بطريقة أخرى

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_j}{r_{ij}}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i V_i$$

هلا لو كان عنا توزيع متصل من الشحنات Continuous charge distribution

$$W = \frac{1}{2}\iiint_{\substack{\text{Volume}\\(\tau)}} \rho V \, d\tau$$

$$W = \frac{1}{2}\iint \sigma V \, d\tau$$

$$W = \frac{1}{2}\int \lambda V \, da$$

بس إذا بتتذكروا انه عملنا جدول وحكينا إذا كان عندي V أو ρ أو E بقدر أطلع الباقيات يعني مثلاً لو عندي ρ بقدر أوجد E عشان هيك ممكن أكتب W بدلالة E.

$$W = \frac{1}{2}\iiint \varepsilon_0 (\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) V \, d\tau$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint \vec{\nabla}\cdot(V\vec{E})\, d\tau - \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint \vec{E}\cdot(\vec{\nabla}V)\, d\tau$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\iint V\vec{E}\cdot d\vec{a} + \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint \vec{E}\cdot\vec{E}\, d\tau$$

هون استخدمنا diverg. Theorem عشان نحول الحد الأول من تكامل على الحجم لتكامل على سطح

هلا احنا لما حطينا التكامل ما حددنا أي حجم وبالتالي بنقدر نعتبره كل الفضاء وإذا اعتبرناه هيك راح يصير الحد VE يتناقص بسرعة أكبر من $\frac{1}{r^2}$ إذن بيصفر بالآخر.

بحسب W

$$\boxed{W = \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint E^2 \, d\tau}$$

خلينا ناخد مثال بثبت صحة اللي وصلناله.

Exp) Pb 2.45 A sphere of radius R carries a charge density $\rho(\vec{r}) = kr$. Find the energy of the configuration.

بنقدر نحل السؤال بطريقتين بس لازم يعطونا نفس الجواب

Method 1) $W = \frac{1}{2}\iiint \rho V \, d\tau$

$$V = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_{\infty}^{r} \frac{kR^4}{r^2}dr + \int_{R}^{r} kr^2 dr\right]$$

$$= \frac{k}{12\varepsilon_0}\left(4R^3 - r^3\right)$$

$$W = \frac{1}{2}\iiint_{sphere} \rho V \, d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} k\,r\,\frac{k}{12\varepsilon_0}\left(4R^3 - r^3\right) r^2 \, dr \sin\theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{R} (\qquad) \, dr$$

$$= \frac{4\pi}{2}\int_0^{R} \frac{k^2}{12\varepsilon_0}\, r\left(4R^3 - r^3\right) r^2 \, dr$$

$$= \frac{4\pi}{2}\frac{k^2}{12\varepsilon_0}\left(R^7 - \frac{1}{7}R^7\right) = \frac{\pi k^2}{7\varepsilon_0}R^7$$

Method 2) بدنا نشوف المجال جوا الكرة

$$Q_{enc} = \iiint_{sphere} \rho(r)\, d\tau = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r} kr'\, r'^2 \sin\theta\, dr'\, d\theta\, d\varphi$$

$$= 2\pi(2)\int_0^{r} k r'^3 dr'$$

$$= 4\pi k \frac{r^4}{4} = \pi k r^4$$

$$\phi_E = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{\pi k r^4}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{k r^2}{4\varepsilon_0}$$

أما خارج الكرة فمثل ما حسبناه قبل ، بنعتبر الكرة شحنة نقطية في المركز ومقدارها (ρ x حجم الكرة)

$$Q = \frac{4\pi R^3}{3}\rho = \frac{4}{3}\pi R^3 (kR) = \frac{4}{3}\pi R^4 k$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{k}{4\varepsilon_0}\frac{R^4}{r^2}$$

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} E^2 d\tau = \frac{4\pi\varepsilon_0}{2}\left[\int_0^{R}\left(\frac{kr^2}{4\varepsilon_0}\right)^2 r^2 dr + \int_0^{R}\left(\frac{kR^4}{4\varepsilon_0 r^2}\right)^2 r^2 dr\right]$$

$$= \frac{2\pi\varepsilon_0 k^2}{16\varepsilon_0^2}\left[\int_0^{R} r^6 dr + \int_0^{R} R^8 \frac{1}{r^2} dr\right]$$

$$= \frac{\pi k^2}{8\varepsilon_0}\left[\frac{R^7}{7} + \frac{R^8}{R}\right] = \frac{\pi k^2 R^7}{7\varepsilon_0}$$

Metallic Conductors

في الموصل الفلزي واحد أو أكثر من الالكترونات لكل ذرة يكون حراً ويتحرك داخل المادة.

الموصلات الفلزية لديها هذه الخصائص في الكهرباء السكونية:

1. المجال الكهربائي داخل الموصل يساوي صفراً.

إذا كان في مجال داخل الموصل فإن الشحنات الحرة (e^-) ستتحرك وتولد مجالاً معاكساً للمجال الأصلي.
وستظل تتحرك حتى تلغي المجال الأصلي.

2. كثافة الشحنة (ρ) داخل الموصل تساوي صفراً.

وهذه الخاصية يمكن استنتاجها من الخاصية الأولى، لأنه إذا كان المجال داخل الموصل صفراً فإن التدفق الكهربائي أيضاً يساوي صفراً. وبتطبيق قانون غاوس ρ تكون صفراً أيضاً.

3. أي محصلة للشحنة على الموصل تترتب/تتوزع على سطح الموصل.

لأنه في الداخل غير مسموح وجود شحنات.

4. الجهد الكهربائي V ثابت على طول الموصل.

لو فرضنا انه عندنا نقطتين a و b داخل الموصل سيكون فرق الجهد بينهما $V(b) - V(a) = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$ واحنا حكينا انه المجال جوا يساوي صفر،
يعني $V(b) - V(a) = 0$ $\Leftarrow$ $V(b) = V(a)$.

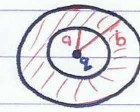
5 المجال الكهربائي عمودي على سطح الموصل.

إذا كان هنالك مركبة مماسية /موازية للمجال ع السطح فإن الشحنات ستحرك ع السطح حتى تلغي هذه المركبة.

Exp) A spherical conducting shell.

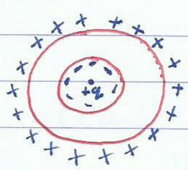
(a) Suppose we place a point charge q at the centre of a neutral spherical conducting shell. It will attract negative charge to the inner surface of the conductor. How much induced charge will accumulate here?

المجال الكهربائي داخل الموصل يساوي (Zero)
لذلك ، التدفق الكهربائي خلال سطح غاوس ع شكل كرة (نق = r) $(a<r<b)$ يساوي صفراً.



لكن ، بناءً ع قانون غاوس هذا يعني أن Q_{enc} يساوي صفر،
وهاد الحكي راح يكون صحيح إذا تكونت شحنة مقدارها $-q$ ع السطح الداخلي من القشرة الكروية.

وبما أنه القشرة الكروية بالأصل كانت متعادلة ، ولأنها موصلة فأي شحنة لازم تترتب ع السطح ⇐ راح يكون شحنة موجبة $+q$ ع السطح الخارجي.



(b) Find E & V as function of r in the three regions $r<a$, $a<r<b$ & $r>b$.

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \qquad b<r$$

$$E(r) = 0 \qquad a<r<b$$

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \qquad r<a$$

والجهد الكهربائي بنطلعه اذا عملنا Line Integral من ∞ لـ r.

$r>b$

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{r}\frac{q}{r'^2}\,dr$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

$a<r<b$

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r}\vec{E}\cdot dL = -\int_{\infty}^{b}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r'^2}\,dr' + \cancel{\int_{b}^{r} E\cdot d\vec{L}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{b}$$

$r<a$

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r}\vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{b}\frac{q}{r'^2}\,dr' - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{a}^{r}\frac{q}{r'^2}\,dr'$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{b} - \frac{q}{a} + \frac{q}{r}\right]$$

في المثال السابق درسنا نظام في Symmetry ولكن يمكننا تعميم ذلك على أي موصل بشكل عشوائي.

Exp) Pb 35 A metal sphere of radius R, carrying charge q is surrounded by thick concentric metal shell (inner radius a outer radius b). The shell carries no net charge.

(a) Find the surface charge density σ at R, at a & at b.

لأن الشحنة الكلية للموصل تترتب على السطح ، الشحنة q تبعت الكرة الفلزية راح تترتب ع سطح الكرة.

كثافة الشحنة على السطح ستساوي

$$\frac{\text{الشحنة الكلية}}{\text{مساحة سطح الكرة}} = \sigma_R = \frac{q}{4\pi R^2}$$

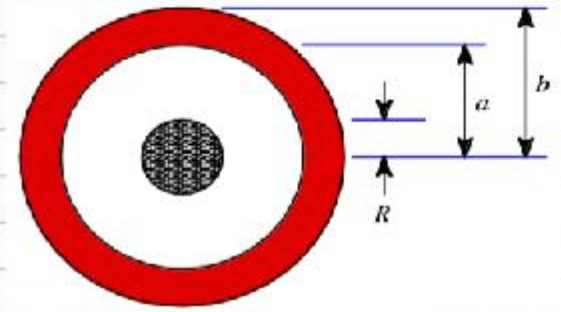
وبسبب وجود شحنة ع الكرة المعدنية/الفلزية سيكون هناك مستحثة مقدارها $-q$ ع السطح الداخلي للقشرة الكروية.

إذن ستكون كثافة الشحنة ع السطح الداخلي عند $r = a$ تساوي

$$\sigma_a = \frac{-q}{4\pi a^2}$$

ولأن القشرة الفلزية كانت متعادلة يجب أن يكون هناك شحنة مقدارها $+q$ ع السطح الخارجي لها عند $r = b$ وكثافة الشحنة تكون

$$\sigma_b = \frac{+q}{4\pi b^2}$$



(b) Find the potential at the centre of the sphere, using ∞ as reference

الجهد يمكن ايجاده بحساب Line Integ. للمجال $\vec{E}$ من ∞ ← المركز.

المجال خارج القشرة $(b<r)$ يمكن ايجاده باستخدام قانون غاوس

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

المجال عندما $a<r<b$ يساوي صفر لأنه داخل الموصل لا يوجد $\vec{E}$.

أما في المنطقة بين القشرة والكرة $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}$

$$V_{centre} = -\int_{\infty}^{0} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= -\int_{\infty}^{b} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} dr - \int_{b}^{a} 0 \, dr - \int_{a}^{0} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} dr$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{b} - \frac{1}{a} + \frac{1}{R} \right]$$

(c) Now the outer surface is touched to a grounding wire, which lowers its potential to zero (same as at ∞). How do your answers to a) & b) change?

إذا وصلنا السطح الخارجي مع الأرضي راح تصير σ_b = صفر

أما σ_a و σ_R راح يظلوا نفس الاشي.

الجهد الكهربائي في المركز راح يتغير،

لأن الجهد على السطح الخارجي راح يصير صفر بجيس

$$V_{centre} = -\int_b^0 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0} \int_a^R \frac{1}{r^2}\, dr$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{a} \right]$$

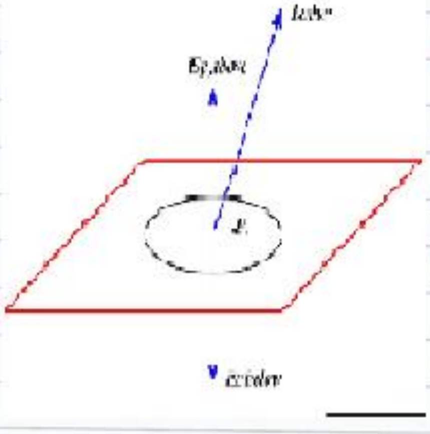
هلا خلينا نغير الموضوع شوي ....

افرض انه عندك موصل على سطحه كثافة شحنة مقدارها σ
بس هالمرة عرضتها لمجال خارجي شو راح يصير ؟!

هلا حكينا قبل انه المجال الكهربائي داخل الموصل بيساوي صفر
الـ Boundary Condition تبعته المجال اللي حكينا عنها بتلزم المجال
اللي فوق الموصل مباشرة بيساوي

$$\vec{E}_{above} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{n}$$

هاد المجال راح يأثر بقوة على الشحنة السطحية.



اعتبر انه عندك قطعة صغيرة رفيعة
كتير من هاد السطح مساحتها dA.

المجال المغناطيسي فوقها وتحتها راح
يساوي الجمع المتجهي (محصلة) المجال
الكهربائي الناشئ عن هاي القطعة
مع المجال الناشئ عن باقي الموصل
بالإضافة للمجال الخارجي:

هلأ المجال الناشئ من القطعة (patch)

$$\vec{E}_{p,above} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{n}$$

$$\vec{E}_{p,below} = \frac{-\sigma}{\varepsilon_0} \hat{n}$$

والمجال الآخر $\vec{E}_{other}$ متصل عبر القطعة وبالتالي محصلة المجال
فوق وتحت راح تكون

$$\vec{E}_{above} = \vec{E}_{other} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$$

$$\vec{E}_{below} = \vec{E}_{other} - \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$$

من هدول المعادلتين بنستنتج انه E_{other} بساوي

$$\vec{E}_{other} = \frac{1}{2}\left(\vec{E}_{above} + \vec{E}_{below}\right)$$

وفي هذه الحالة المجال أسفل السطح بساوي صفر،
والمجال فوق تم تحديده مباشرة من BCs

$$\vec{E}_{other} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n} + 0\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$$

ولأنه القطعة ما بتقدر تعمل قوة على حالها فالقوة الكهربائية
اللي بتأثر عليها هي بفعل وجود $\vec{E}_{other}$.

مقدار الشحنة اللي موجودة على القطعة الصغيرة اللي أخذناها من السطح
بساوي σdA . وبالتالي القوة المؤثرة عليها

$$d\vec{F} = \sigma\, dA\, \vec{E}_{other}$$

$$= \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\, dA\, \hat{n}$$

القوة لكل وحدة مساحة للموصل

$$\boxed{f = \frac{d\vec{F}}{dA} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\,\hat{n}}$$

هذه المعادلة يمكن كتابتها بدلالة E خارج الموصل (على سطحه من الخارج).

$$f = \frac{1}{2\varepsilon_0}\left(\varepsilon_0 E^2\right)\hat{n}$$

$$\boxed{f = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2\,\hat{n}}$$

تكون عمودية للخارج
تسمى
Radiation pressure.

Capacitors

وأخيراً وصلنا لآخر مواضيع الشابتر ...

افرض انه عندك موصلين (Two Conductors) واحد منهم يحمل شحنة موجبة $+Q$ والثاني شحنة سالبة $-Q$.

فرق الجهد بينهم

$$\Delta V = V_+ - V_- = -\int_-^+ \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

ولأن $\vec{E}$ يتناسب مع Q ، فرق الجهد أيضاً يتناسب مع Q

وثابت التناسب بنسميه السعة (Capacitance)

$$\Delta V \propto Q$$

$$C \, \Delta V = Q$$

$$\boxed{C = \frac{Q}{\Delta V}}$$

السعة تتأثر بالحجم والشكل والبعد بين الموصلين .

وحدة C : فاراد F .

سعة أي نظام يتكون من عدة موصلات يمكن حسابها بشكل عام بتنفيذ الخطوات التالية :

1. ضع شحنة مقدارها $+Q$ عل أحد الموصلات وضع شحنة $-Q$ على الموصل الآخر . (هاد الحكي لنظام بيتكون من موصلين)

2. احسب المجال الكهربائي في المنطقة الواقعة بين الموصلين .

3. استخدم $\vec{E}$ اللي أوجدته في الخطوة السابقة لإيجاد ΔV .

4. عوض اللي طلع معك في المعادلة $C = \frac{Q}{\Delta V}$.

خلينا ناخد كم مثال عل هاد الحكي :

Exp) Find the capacitance of two concentric spherical shells.

يعني عنا قشرتين كرويات الهم نفس المركز بس طبعاً وحدة أكبر من التانية

بنحط شحنة $+Q$ عل الداخلية و $-Q$ على الخارجية

المجال بينهم بنوجده باستخدام قانون غاوس

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r} \qquad a<r<b$$

فرق الجهد بين الداخلية والخارجية (وهي القشرة الكروية مش وزارة الداخلية 🙂).

$$\Delta V = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{L} = -\int_a^b \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\,dr$$

$$\Delta V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right]$$

السعة إذن تساوي

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}$$

$$= 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$

مش بالضرورة يكون عندي موصلين عشان يكون في سعة
ممكن يكون عندي موصل واحد.

على سبيل المثال نعتبر انه عندك قشرة كروية واحدة نق $= R$.

السعة ممكن إيجادها كما يلي :

اعتبر انه عندك Q على الموصل، باستخدام غاوس

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,\hat{r}$$

خذ ∞ المرجع وأوجد الجهد على سطح الكرة الموصلة اللي عندك

$$V(R) = -\int_{\infty}^{R} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_{\infty}^{R}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,dr$$

$$= \frac{Q}{R}\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}}$$ تصبح السعة

$$\boxed{C = 4\pi\varepsilon_0 R}$$

هلا خلينا نحكي شوي عن المواسع ذو الصفيحتين المتوازيتين

(Two parallel-plate Capacitor).

الشغل اللازم لشحن هاد المواسع ممكن ينحسب بطريقتين

الطريقة 1) لأنه احنا حرين في اختيار المرجع تبع الجهد راح نختار نقطة المرجع بحيث قيمة الجهد على الصفيحة الموجبة تكون $+\frac{\Delta V}{2}$ وعلى الصفيحة السالبة $-\frac{\Delta V}{2}$.

تصبح energy لهاد النظام تساوي

$$W = \frac{1}{2}\int \rho V \, d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\left[Q\frac{\Delta V}{2} + -Q\left(-\frac{\Delta V}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2} Q\,\Delta V$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2}$$

الطريقة 2) خلونا نتفرج على عملية شحن المواسع بالتفصيل:

بالبداية بكون الموصلين غير مشحونين و $\Delta V = 0$.

وخلال عملية الشحن راح تكون كمية الشحنة على الصفيحة الموجبة تساوي q . وفرق الجهد راح يصير

$$\Delta V = \frac{q}{C}$$

ولزيادة مقدار الشحنة على الصفيحة بمقدار dq علينا أن نحرك شحنة مقدارها dq عبر ΔV (فرق الجهد).

والشغل اللازم لهاد الإشي

$$dW = \Delta V \, dq$$
$$dW = \frac{q}{C} \, dq$$

إذن الشغل الكلي اللازم لشحن المواسع من $q =$ صفر الى $q = Q$

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C} \, dq$$
$$= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$
$$= \frac{1}{2} C (\Delta V)^2$$

Exp) Pb_s 40 Suppose the plates of a parallel-plate capacitor move closer together by an infinitesimal distance ε, as a result of their mutual attraction.

(a) Use eq (2.45) in book to express the amount of work done by electrostatic forces in terms of the field E & the are of plates A.

راح نعتبر انه المواسع مثالي والمجال منتظم بداخله وما في مجال برا الصفيحتين.

القوة لكل وحدة مساحة زي ما أوجدناها قبل

$$\vec{f} = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \hat{n}$$

فالقوة الكلية على كل صفيحة

$$\vec{F} = A\vec{f} = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 A \hat{n}$$

وبسبب وجود هذه القوة الصفيحتين راح يصيروا يقربوا ع بعض بمسافة صغيرة جداً جداً (ε) مقدارها.

الشغل المبذول من القوة الكهربائية خلال هاي الحركة بساوي

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{l} = \frac{\varepsilon_0}{2} A \varepsilon E^2.$$

ε مسافة بتختلف عن ε_0 ثابت النفاذية الكهربائية.

b) Use eq(2.40) of Book to express the energy lost by the field in this process.

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int E^2 \, d\tau$$

في المواسع المثالي، المجال بكون ثابت وبالتالي بنقدر نوجد التكامل بسهوله

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \, (\text{Volume})$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \, (\text{Area} \times d)$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \, (A\, d).$$

d: المسافة الفاصلة بين الصفيحتين.

إذا المسافة d صارت تنقص بمقدار ε راح يقل الطاقة المخزونه بمقدار ΔW.

$$\Delta W = \frac{\varepsilon_0}{2} A\, d\, E^2 - \frac{\varepsilon_0}{2} A\, (d-\varepsilon)\, E^2$$

$$\Delta W = \frac{\varepsilon_0}{2} A\, \varepsilon\, E^2$$

وهو مساوٍ للشغل الذي بذله القوة الكهربائية على صفيحتي المواسع. (مثل ما طلع معنا في a).

وأخيراً خلص الشابتر

لهون راح تكون مادة الفيرست،
بالتوفيق بالامتحان
وكالعادة إذا لقيتوا توفيق نادوني
أتصور معه ههههه ^^