Sept 2013

Chapter 1
Time Complexity

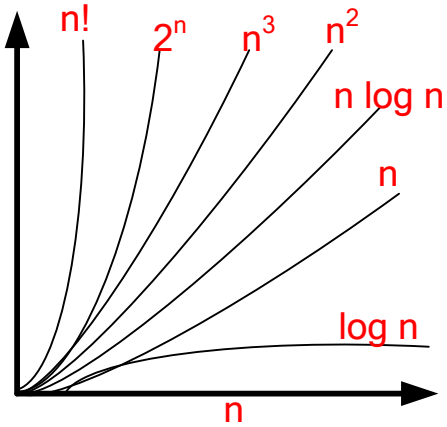
مذكرات شرح وتمارين محلولة،
امتحانات سابقة للعديد من المواد أدناه
متاحة مجاناً على الموقعين المذكورين

6. Reorder the following efficiencies from smallest to largest:

a. 2^n
b. $n!$
c. n^5
d. 10,000
e. $n\log_2(n)$

عند ترتيب وقت الدوال يجب الأخذ فى الاعتبار ما يلي:

- أي رقم ثابت مهما كان كبيراً فهو O (1).
- نقوم بإهمال lower terms عند المقارنة فمثلاً ($7\ n^2 + 100\ n$) نتعامل معها كأنها ($7\ n^2$) ونهمل ($100\ n$) لأنه فى حال قيم n كبيرة تكون ($7\ n^2 >>> 100\ n$)
- نقوم بإهمال leading factors فمثلاً $7\ n^2 = O(n^2)$ وكذلك $100\ n^2 = O(n^2)$ فكأن كلاهما لهما نفس efficiency.
- عند ذكر log n فإنها تعنى $\log_2 n$ ما لم يذكر خلاف ذلك.
- يمكن الاسترشاد بالرسم البياني الموضح.



answer:

1) 10,000
2) n log n
3) n^5
4) 2^n
5) n!

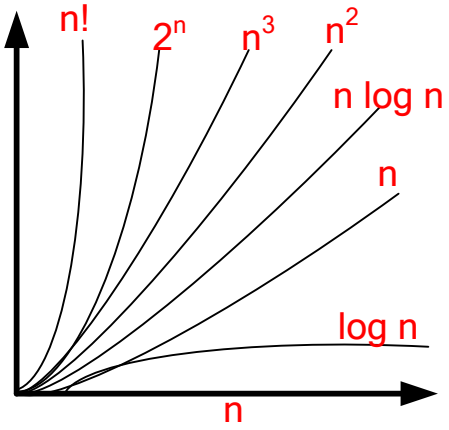
المنافسة الحقيقية دائماً ما تكون بين ما قمت بفعله وما أنت قادر على فعله

7. Reorder the following efficiencies from smallest to largest:

a. $n\log_2(n)$
b. $n + n^2 + n^3$
c. 2^4
d. $n^{0.5}$

عند ترتيب وقت الدوال يجب الأخذ فى الاعتبار ما يلي:

- أي رقم ثابت مهما كان كبيراً فهو O (1).
- نقوم بإهمال lower terms عند المقارنة فمثلاً ($7\ n^2 + 100\ n$) نتعامل معها كأنها (n^2) ونهمل ($100\ n$) لأنه فى حال قيم n كبيرة تكون ($7\ n^2 >>> 100\ n$)
- نقوم بإهمال leading factors فمثلاً $7\ n^2 = O(n^2)$ وكذلك $100\ n^2 = O(n^2)$ فكأن كلاهما لهما نفس efficiency.
- عند ذكر logn فإنها تعنى $\log_2 n$ ما لم يذكر خلاف ذلك.
- يمكن الاسترشاد بالرسم البياني الموضح.



answer:

1) $2^4 = O(1)$
2) $n^{0.5}$
3) $n \log n$
4) $n + n^2 + n^3$

وضع اللمسة الأخيرة على عملك
بمثابة التاج الذي يكلل نجاحك

8. Determine the big-O notation for the following:

a. $5n^{5/2} + n^{2/5}$

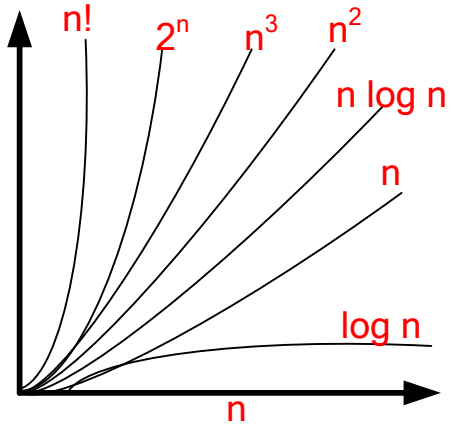
b. $6\log_2(n) + 9n$

c. $3n^4 + n\log_2(n)$

d. $5n^2 + n^{3/2}$

عند ترتيب وقت الدوال يجب الأخذ فى الاعتبار ما يلي:

- أي رقم ثابت مهما كان كبيراً فهو $O(1)$.
- نقوم بإهمال lower terms عند المقارنة فمثلاً $\boxed{(7n^2 + 100n)}$ نتعامل معها كأنها $(7n^2)$ و نهمل $(100n)$ لأنه فى حال قيم n كبيرة تكون $\boxed{(7n^2 >>> 100n)}$.
- نقوم بإهمال leading factors فمثلاً $\boxed{7n^2 = O(n^2)}$ وكذلك $\boxed{100n^2 = O(n^2)}$ فكأن كلاهما لهما نفس efficiency.
- عند ذكر logn فإنها تعنى $\log_2 n$ ما لم يذكر خلاف ذلك.
- يمكن الاسترشاد بالرسم البياني الموضح:



Answer:

1) $6 \log n + 9n = O(n)$
2) $5n^2 + n^{3/2} = O(n^2)$
3) $5n^{5/2} + n^{2/5} = O(n^{2.5})$
4) $3n^4 + n \log n = O(n^4)$

إذا أردت أن تنجز عملا بشكل جيد، فستجد وسيلة لإنجازه مهما كانت الظروف

9. Calculate the run-time efficiency of the following program segment:

```
1   i = 1
2   loop (i <= n)
     1   print (i)
     2   i = i + 1
3   end loop
```

عند طلب حساب الوقت المطلوب لتنفيذ ألجوريزم يجب مراعاة التالي:

- فى حال عدم وجود loop أو recursion فإن الوقت المطلوب هو O(1).
- فى حال وجود recursion فإنه يقوم مقام loop.
- الحد الأقصى لوقت algorithm يحتوى على loop واحدة هو O(n) ويمكن أن يكون أقل من ذلك O(log n) أو O(1) لكن لا يمكن أن يكون مثلا $O(n^2)$ أو O(log n).
- الحد الأقصى لوقت algorithm يحتوى على two nested loops هو $O(n^2)$ ويمكن أن يكون أقل من ذلك مثلا O(n log n) أو O(n) والعبرة فى ذلك حسب شروط إيقاف loops.
- فى حال loop counter يبدأ من 1 ويتضاعف كل مرة بضربه x 2 أو يبدأ من n ويتم قسمته على 2 فى كل مرة فإن الوقت المطلوب لهذه loop هو O(log n).
- عدد الخطوات داخل loop لا يؤثر على big oh notation لها طالما أننا لا نهتم بالـ leading factor عند الحكم على ألجوريزم وطالما أن هذه الخطوات لا تحتوى على loops أو تستدعى ألجوريزمات أخرى لها وقت تنفيذ خلاف O(1).

answer → O (n)

الذين يسعون دائما نحو التميز والأفضل
يصبحوا تلقائيا مثلاً للآخرين

10. Calculate the run-time efficiency of the following program segment:

```
1  i = 1
2  loop (i <= n)
    1  j = 1
    2  loop (j <= n)
        1  k = 1
        2  loop (k <= n)
            1  print (i, j, k)
            2  k = k + 1
        3  end loop
        4  j = j + 1
    3  end loop
    4  i = i + 1
3  end loop
```

عند طلب حساب الوقت المطلوب لتنفيذ ألجوريزم يجب مراعاة التالي:

- فى حال عدم وجود loop أو recursion فإن الوقت المطلوب هو O(1).
- فى حال وجود recursion فإنه يقوم مقام loops.
- الحد الأقصى لوقت algorithm يحتوى على loop واحدة هو O(n) ويمكن أن يكون أقل من ذلك O(log n) أو O(1) لكن لا يمكن أن يكون مثلا $O(n^2)$ أو O(log n).
- الحد الأقصى لوقت algorithm يحتوى على two nested loops هو $O(n^2)$ ويمكن أن يكون أقل من ذلك مثلا O (n log n) أو O (n) والعبرة فى ذلك حسب شروط إيقاف loops.
- فى حال loop counter يبدأ من 1 ويتضاعف كل مرة بضربه × 2 أو يبدأ من n ويتم قسمته على 2 فى كل مرة فإن الوقت المطلوب لهذه loop هو O(log n).
- عدد الخطوات داخل loop لا يؤثر على big oh notation لها طالما أننا لا نهتم بالـ leading factor عند الحكم على ألجوريزم وطالما أن هذه الخطوات لا تحتوى على loops أو تستدعى ألجوريزمات أخرى لها وقت تنفيذ خلاف O(1).

answer → $O(n^3)$

11. If the algorithm doIt has an efficiency factor of $5n$, calculate the run-time efficiency of the following program segment:

```
1  i = 1
2  loop i <= n
     1  doIt (...)
     2  i = i + 1
3  end loop
```

عند طلب حساب الوقت المطلوب لتنفيذ ألجوريزم يجب مراعاة التالي:

- فى حال عدم وجود loop أو recursion فإن الوقت المطلوب هو O(1).
- فى حال وجود recursion فإنه يقوم مقام loops.
- الحد الأقصى لوقت algorithm يحتوى على loop واحدة هو O(n) ويمكن أن يكون أقل من ذلك O(log n) أو O(1) لكن لا يمكن أن يكون مثلا $O(n^2)$ أو O(log n).
- الحد الأقصى لوقت algorithm يحتوى على two nested loops هو $O(n^2)$ ويمكن أن يكون أقل من ذلك مثلا O(n log n) أو O(n) والعبرة فى ذلك حسب شروط إيقاف loops.
- فى حال loop counter يبدأ من 1 ويتضاعف كل مرة بضربه × 2 أو يبدأ من n ويتم قسمته على 2 فى كل مرة فإن الوقت المطلوب لهذه loop هو O(log n).
- عدد الخطوات داخل loop لا يؤثر على big oh notation لها طالما أننا لا نهتم بالـ leading factor عند الحكم على ألجوريزم وطالما أن هذه الخطوات لا تحتوى على loops أو تستدعى ألجوريزمات أخرى لها وقت تنفيذ خلاف O(1).

answer → O(n * O(doIt))

= O(n * O(n))

= $O(n^2)$

12. If the efficiency of the algorithm doIt can be expressed as $O(n) = n^2$, calculate the efficiency of the following program segment:

```
1  i = 1
2  loop (i <= n)
    1  j = 1
    2  loop (j < n)
        1  doIt (...)
        2  j = j + 1
    3  end loop
    4  i = i + 1
3  end loop
```

عند طلب حساب الوقت المطلوب لتنفيذ ألجوريزم يجب مراعاة التالي:

- فى حال عدم وجود loop أو recursion فإن الوقت المطلوب هو O(1).
- فى حال وجود recursion فإنه يقوم مقام loops.
- الحد الأقصى لوقت algorithm يحتوى على loop واحدة هو O(n) ويمكن أن يكون أقل من ذلك (O(log n أو O(1) لكن لا يمكن أن يكون مثلا $O(n^2)$ أو O(log n).
- الحد الأقصى لوقت algorithm يحتوى على two nested loops هو $O(n^2)$ ويمكن أن يكون أقل من ذلك مثلا O (n log n) أو O(n) والعبرة فى ذلك حسب شروط إيقاف loops.
- فى حال loop counter يبدأ من 1 ويتضاعف كل مرة بضربه × 2 أو يبدأ من n ويتم قسمته على 2 فى كل مرة فإن الوقت المطلوب لهذه loop هو O(log n).
- عدد الخطوات داخل loop لا يؤثر على big oh notation لها طالما أننا لا نهتم بالـ leading factor عند الحكم على ألجوريزم وطالما أن هذه الخطوات لا تحتوى على loops أو تستدعى ألجوريزمات أخرى لها وقت تنفيذ خلاف O(1).

answer → O (n * n * O (n^2)) = O (n^4)

13. If the efficiency of the algorithm doIt can be expressed as $O(n) = n^2$, calculate the efficiency of the following program segment:

```
1   i = 1
2   loop (i < n)
      1   doIt (...)
      2   i = i * 2
3   end loop
```

عند طلب حساب الوقت المطلوب لتنفيذ ألجوريزم يجب مراعاة التالي:

- فى حال عدم وجود loop أو recursion فإن الوقت المطلوب هو O(1).
- فى حال وجود recursion فإنه يقوم مقام loops.
- الحد الأقصى لوقت algorithm يحتوى على loop واحدة هو O(n) ويمكن أن يكون أقل من ذلك O(log n) أو O(1) لكن لا يمكن أن يكون مثلا $O(n^2)$ أو O(log n).
- الحد الأقصى لوقت algorithm يحتوى على two nested loops هو $O(n^2)$ ويمكن أن يكون أقل من ذلك مثلا O(n log n) أو O(n) والعبرة فى ذلك حسب شروط إيقاف loops.
- فى حال Loop counter يبدأ من 1 ويتضاعف كل مرة بضربه × 2 أو يبدأ من n ويتم قسمته على 2 فى كل مرة فإن الوقت المطلوب لهذه loop هو O(log n).
- عدد الخطوات داخل loop لا يؤثر على big oh notation لها طالما أننا لا نهتم بالـ leading factor عند الحكم على ألجوريزم وطالما أن هذه الخطوات لا تحتوى على loops أو تستدعى ألجوريزمات أخرى لها وقت تنفيذ خلاف O(1).

answer → O (log n * O (n^2)) = O (n^2 log n)

14. Given that the efficiency of an algorithm is $5n^2$, if a step in this algorithm takes 1 nanosecond (10^{-9}), how long does it take the algorithm to process an input of size 1000?

Time required = (number of steps) * (time of each step)

$= (5 \ n^2) * (t)$

$= (5 * (1000)^2) * (10^{-9})$

$= 5 * 10^{-3}$ seconds

$= 0.005$ second

16. Given that the efficiency of an algorithm is $5n\log_2(n)$, if a step in this algorithm takes 1 nanosecond (10^{-9}), how long does it take the algorithm to process an input of size 1000?

Time required = (number of steps) * (time of each step)

= (5 n log n) * (t)

= (5 * 1000 * log (1000)) * ($1*10^{-9}$)

$\simeq 50 * 10^{-6}$ seconds

الرغبات الضعيفة تحقق نتائج ضعيفة،
تماما كما أن قدرا صغيراً من النيران لا
يصنع إلا قدرا صغيراً من الحرارة

8. Find the complexity of the function used to find the *k*th smallest integer in an unordered array of integers

```
int selectkth(int a[], int k, int n) {
    int i, j, mini, tmp;
    for (i = 0; i < k; i++) {
        mini = i;
        for (j = i+1; j < n; j++)
            if (a[j]<a[mini])
                mini = j;
        tmp = a[i];
        a[i] = a[mini];
        a[mini] = tmp;
    }
    return a[k-1];
}
```

عند طلب حساب الوقت المطلوب لتنفيذ ألجوريزم يجب مراعاة التالي:

- فى حال عدم وجود loop أو recursion فإن الوقت المطلوب هو O(1).
- فى حال وجود recursion فإنه يقوم مقام loops.
- الحد الأقصى لوقت algorithm يحتوى على loop واحدة هو O(n) و يمكن أن يكون أقل من ذلك O(log n) أو O(1) لكن لا يمكن أن يكونن مثلا $O(n^2)$ أوO(log n).
- الحد الأقصى لوقت algorithm يحتوى على two nested loops هو $O(n^2)$ ويمكن أن يكون أقل من ذلك مثلا O(n log n) أو O(n) والعبرة فى ذلك حسب شروط إيقاف loops.
- فى حال loop counter يبدأ من1 ويتضاعف كل مرة بضربه × 2 أو يبدأ من n ويتم قسمته على 2 فى كل مرة فإن الوقت المطلوب لهذه loop هو O(log n).
- عدد الخطوات داخل loop لا يؤثر على big oh notation لها طالما أننا لا نهتم بالـ leading factor عند الحكم على ألجوريزم وطالما أن هذه الخطوات لا تحتوى على loops أو تستدعى ألجوريزمات أخرى لها وقت تنفيذ خلاف O(1).

Answer → O (k * O (n)) = O (k n)

يمكن أن يكون k أي قيمة من 1 إلى n، أي أن (k = O (n)) وبالتالي فإن أقصي وقت لهذه الدالة هو $O(n^2)$.

نقطة الانطلاق لكل الإنجازات هي الرغبة، تذكر هذا دائما وباستمرار

9. Determine the complexity of the following implementations of the algorithms for adding, multiplying, and transposing $n \times n$ matrices:

```
for (i = 0; i < n; i++)
    for (j = 0; j < n; j++)
        a[i][j] = b[i][j] + c[i][j];
```

$O(n^2)$

```
for (i = 0; i < n; i++)
    for (j = 0; j < n; j++)
        for (k = a[i][j] = 0; k < n; k++)
            a[i][j] += b[i][k] * c[k][j];
```

$O(n^3)$

```
for (i = 0; i < n - 1; i++)
    for (j = i+1; j < n; j++) {
        tmp = a[i][j];
        a[i][j] = a[j][i];
        a[j][i] = tmp;
    }
```

$O(\frac{n^2}{2}) = O(n^2)$

عند طلب حساب الوقت المطلوب لتنفيذ ألجوريزم يجب مراعاة التالي:

- فى حال عدم وجود loop أو recursion فإن الوقت المطلوب هو O(1).
- فى حال وجود recursion فإنه يقوم مقام loops .

- الحد الأقصى لوقت algorithm يحتوى على loop واحدة هو O(n) ويمكن أن يكون أقل من ذلك O(log n) أو O(1) لكن لا يمكن أن يكون مثلا $O(n^2)$ أو O(log n).
- الحد الأقصى لوقت algorithm يحتوى على two nested loops هو $O(n^2)$ ويمكن أن يكون أقل من ذلك مثلا O(n log n) أو O (n) والعبرة فى ذلك حسب شروط إيقاف loops.

- فى حال loop counter يبدأ من 1 ويتضاعف كل مرة بضربه × 2 أو يبدأ من n ويتم قسمته على 2 فى كل مرة فإن الوقت المطلوب لهذه loop هو O(log n).

- عدد الخطوات داخل loop لا يؤثر على big oh notation لها طالما أننا لا نهتم بالـ leading factor عند الحكم على ألجوريزم وطالما أن هذه الخطوات لا تحتوى على loops أو تستدعى ألجوريزمات أخرى لها وقت تنفيذ خلاف O(1).

10. Find the computational complexity for the following four loops:

a.
```
for (cnt1 = 0, i = 1; i <= n; i++)
    for (j = 1; j <= n; j++)
        cnt1++;
```

answer → cnt1 = $n + n + n \ldots + n + n = n^2$

b.
```
for (cnt2 = 0, i = 1; i <= n; i++)
    for (j = 1; j <= i; j++)
        cnt2++;
```

$$cnt2 = 1 + 2 + 3 + 4 \ldots\ldots + (n-1) + (n)$$

$$= \frac{n}{2}(n+1)$$

$$= \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

c.
```
for (cnt3 = 0, i = 1; i <= n; i *= 2)
    for (j = 1; j <= n; j++)
        cnt3++;
```

$$cnt3 = n + n + n \ldots. (\log\ n\ \text{times})$$

$$= n * \log\ n$$

d.
```
for (cnt4 = 0, i = 1; i <= n; i *= 2)
    for (j = 1; j <= i; j++)
        cnt4++;
```

$$cnt4 = (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots\ldots\ldots \log\ n)$$

$$= \frac{2^{\log n + 1} - 1}{2 - 1}$$

$$= 2^{\log n + 1} - 1$$

الخيال يعدو بأقصى سرعة،
والمنطق يسير بالكاد