Common continuous Random Variables

1 Uniform Distribution :-

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} , & a \le x \le b \\ 0 , & o.w \end{cases}$$

$$\boxed{\mu_X = \frac{a+b}{2}} \qquad \boxed{\sigma_X^2 = \frac{(b-a)^2}{12}}$$

2 Exponential Distribution :-

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} , & x \geq 0 \\ 0 , & o.w \end{cases}$$

$$\boxed{\mu_X = \frac{1}{\lambda}} \qquad \boxed{\sigma_X^2 = \frac{1}{\lambda^2}}$$

3 Gaussian (Normal) Distribution :-

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} e^{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}} , \quad -\infty < x < \infty$$

$$\boxed{\mu_X = E\{x\}} \qquad \boxed{Var\{x\} = \sigma_X^2}$$

هاد اللي بس نعمل تكامل وبدنا نجد الـProbability ، إذا كان $\boxed{\mu_X = 0 \text{ و } \sigma_X^2 = 1}$

بروح بستخدم الجدول تبع ϕ . $\boxed{\int_{-\infty}^{x} \_\_\_}$

$\cancel{\#}$ ، ✲

$$\boxed{\phi(-a) = 1 - \phi(a)}$$

$$P(X \le -1.4) = \int_{-\infty}^{-1.4} \sim = \phi(-1.4) \Rightarrow = 1 - \phi(1.4)$$

إذا كانوا الـ $\boxed{\mu_X \neq 0}$ و $\boxed{\sigma_X^2 \neq 1}$ بستخدم الصيغة التالية عشان أخلص من التكامل و يصير الـ mean والـvar

بعوضهم available :- $\phi\left(\frac{\text{upper value} - \text{mean}}{\sqrt{\sigma_X^2}}\right) \Leftarrow$

$$P(X < 1.6) = \int_{-\infty}^{1.6} f_X(x)\,dx = \phi\left(\frac{1.6-1}{\sqrt{9}}\right)$$

$$= \phi\left(\frac{0.6}{3}\right)$$ وبشوف الجدول

mean $= 1$
$\sigma_X^2 = 9$

Covariance للـ قانون كمان $\boxed{8} \longrightarrow$

PMF : Probability mass function.

إني نحط لها إكس تساوي كذا كذا البروبابيليتي تبعتها بتساوي كذا كذا.

يعني فعلياً "هي" إني نحط الprobability في مكان واحد.

$$P(X=x) = \left\{ \underset{0,\,\text{owe}}{} \right\}$$

* $E\{X^2\} = \sigma_x^2 + \mu_x^2$

$\sigma^2 \to$ Variance

$\sigma \to$ Standard deviation

* For $\boxed{\text{Binomial}}$ r.v with Parameters (n) and (P),

n — الكبيرة

P. Probability of success

$$\mu_X = E\{X\} = nP$$

$$\sigma_X^2 = Var\{X\} = n\underset{\text{success الـ}}{P}\underset{\text{failure الـ}}{(1-P)}$$

* For the Geometric Distribution :-

$$\mu_X = E\{X\} = \frac{1}{P}$$ ← Probability of success

$$\sigma_x^2 = Var(x) = \frac{1-P}{P^2}$$

$1-P$ ← Probability of faliure = 1 − Probability of success

P^2 ← (Probability of success)^2

* For Possion Distribution :-

$$\mu_X = E(X) = b = \lambda T$$

$$\sigma_x^2 = Var(x) = b$$

$$P(X=x) = e^{-\lambda T}\frac{(\lambda T)^x}{x!}$$

$\Rightarrow \lambda = \dfrac{\text{something}}{\text{unit}}$ or Per

فلما أضربها بال T ما بصير ال T بتروح مع ال unit

Sum of two continuous Random Variables

If $\boxed{Z = x + y}$, then the pdf of z is:-

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)\, f_y(z-x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_y(y)\, f_x(z-y)\, dy$$

Convolutional Integral

Elementary Statistics

[1] Sample Mean:- $\hat{\mu}_x = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ ← مجموع عناصر العينة

n ← عدد عناصر العينة

[2] Sample Variance:- $\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_x)^2$ ← إزا كان ال Men الحقيقي معروف

[3] Sample Variance:- $\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \hat{\mu}_x)^2$ ← إزا كان ال Sample Mean معروف

[4] Sample Standard deviation:- $\hat{\sigma}_x = \sqrt{\hat{\sigma}_x^2} = \sqrt{\text{اللي فوق}}$

[5] Sample Variance:-

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n(n-1)} \left[n \sum x_i^2 - \left(\sum x_i \right)^2 \right]$$

[6] Sample covariance:- $C_{x,y} = \hat{\mu}_{x,y} = \frac{1}{n-1} \sum \left((x_i - \hat{\mu}_x)(y_i - \hat{\mu}_y) \right)$

[7] Sample correlation coefficient:- $r_{xy} = \frac{C_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$

Standard deviation → $\sigma_x \sigma_y$
وليس Variance

8 Sample Covariance :-

$$C_{xy} = \frac{1}{n(n-1)} \left[n \sum x_i y_i - \left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right) \right]$$

Regression Techniques

1 Mean Square Error :- $E = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - g(x_i)\right)^2$

→ If $\boxed{g(x) = \alpha X_i + \beta}$

to find $\boxed{\alpha}$ and $\boxed{\beta}$, use linear Algebra, we get :-

$$\boxed{\alpha = \frac{C_{xy}}{\hat{\sigma}_x^2}} \quad \text{and} \quad \boxed{\beta = \hat{\mu}_y - \alpha \hat{\mu}_x}$$

→ To rewrite $g(x) = Y = \alpha x + \beta$

$$\boxed{\frac{Y - \hat{\mu}_y}{\sigma_y} = r_{xy} \left(\frac{x - \hat{\mu}_x}{\sigma_x} \right)}$$

← نقلنا الإكسات عند بعض والوايات عند بعض .

Polynomial Regression

1 بنكتب معادلة ال E (Mean Square error) ، بعدين بيكون معطيني معادلة g(x) هي بتكون Polynomial ، فبعوضها بال E .

2 بشتق المعادلة حسب عدد الثوابت الموجودة فيها ، بالنسبة لهاي الثوابت ، عشان أوجد أقل error .

3 بحطهم بمصفوفات حسب الترتيب اللي حاكية عنه بالدفتر (من العامل اللي متغيره أقل درجة ، فالأكثر فالأكثر) .

4 بعوضهم بمعادلة الإيرور وبوجد قيمته لأنو كل إشي بيكون معاي وقتها .

Fitting an Exponential by the Method of Least Square

الهدف منها إنو مهما أعطاني أي معادلة زي مثلاً :-

$$Y = ae^{bx} \quad \text{أو} \quad Y = \frac{L}{1+e^{a+bx}}$$

أقدر أحولها لصيغة ال linear ← $Y = \alpha X + \beta$ ، وأقدر أطلع الإيرور

بتعها ، مش بس علاقة فرضنا مش أكثر (بدي أقدر أفرض المتغيرات بدلالة متغيرات ثانية).

Central Limit Theorem

If $\boxed{Y = C_1 X_1 + C_2 Y_2 + C_3 Y_3}$

$\boxed{1}$ $E\{Y\} = C_1 \mu_{x_1} + C_2 \mu_{x_2} + C_3 \mu_{x_3}$

$\boxed{2}$
$$\mathrm{Var}\{Y\} = C_1^2 \sigma_{x_1}^2 + C_2^2 \sigma_{x_2}^2 + C_3^2 \sigma_{x_3}^2 + \left.\begin{aligned} &2C_1C_2\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}\rho_{x_1,x_2} \\ &+ 2C_1C_3\sigma_{x_1}\sigma_{x_3}\rho_{x_1,x_3} \\ &+ 2C_2C_3\sigma_{x_2}\sigma_{x_3}\rho_{x_2,x_3}\end{aligned}\right\}$$

هدول بيروحوا (بيصيروا صفر) إذا كانوا $X_1, X_2 \& X_3$ are statistically independent

عشان

$\rho_{x_1x_2} = \rho_{x_1x_3} = \rho_{x_2x_3} = 0$

Zero

غالباً لما يعطي الأشي Gaussian وصوطني ماي المعطيات

وبدو ال probability

$\boxed{3}$ $E\{\hat{\mu}_x\} = \mu_x$ ← السمة العادي مش ^

$\boxed{4}$ $\mathrm{Var}\{\hat{\mu}_x\} = \dfrac{\sigma_x^2}{n}$ ← ال σ_x^2 العادي مش ال ^

$$\boxed{E\{x^2\} = \sigma_x^2 + \mu_x^2}$$ ← قانون مهم ملوش دخل بال Centeral Theorem

نفسها ال ^

$E\{(\hat{\mu}_x)^2\} - \mu_x^2 = \mathrm{Var}\{\hat{\mu}_x\}$

$E\{\hat{\mu}_x^2\} - \mu_x^2 = \frac{\sigma_x^2}{n}$

بس طبعاً إذا عوضت فيه وصلك بنطلع متوازيتها زي

Estimation of Parameters

Point Estimator

1. If $\boxed{E(\hat{\theta}) = \theta}$, the point estimator $\hat{\theta}$ is Unbiased.
2. If $\boxed{E(\hat{\theta}) - \theta = B}$, " " " $\hat{\theta}$ is Biased.
   B = the bias of the estimator $(\hat{\theta})$.

→ $E\{\hat{\mu}_x\} = \mu_x \leftarrow \hat{\mu}_x$ is unbiased.

$E\{\hat{P}\} = P \leftarrow \hat{P}$ is an unbiased estimator.

لا أحسب $E\{\}$ بعوض عادي بقانون E اللي بتشابه 2 و :-

$$E\{X\} \triangleq \sum x P(X=x)$$
$$\triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x)\, dx$$

3. If $\hat{\theta}_1$ and $\hat{\theta}_2$ are two unbiased estimators of (θ), then the one with the smallest variance is called (MVUE) :-
   Minimum Variance Unbiased estimator.

The Maximum Likelihood (ML) Estimator

بيعطيني نسبة of success ، وبيحكيلي أقدار الأمر ، وفحسب نوع الـ Probability
بعوض بالقانون تبع الـ distribution المُراد ، و ~~...~~ الأكثر هي اللي بآخذها $(\hat{P})$ ،
أو ممكن يكون بدو الـ P تقريبي ، فبس بشتق .

→ Discrete Case

Continuous Case :-
بجيب الـ cdf الخاص بالفنكشن المطلوب ، وبكتب المعادلة بصيغة قابلة للاشتقاق ، وبتم الاشتقاق بالنسبة للـ Parameter المطلوب تخل هذه estimator . وبساوي بالصفر ، وبطلع معادلة ،
وبالعادة بنفحص الـ biasing لهاي المعادلة ، بس إذا مش طالب فقط ذاي أهمل .

Finding Interval Estimators for the mean and Variance

1 Confidence Interval on the mean (Known Variance) :-

$$\boxed{P\left(\hat{\mu}_x - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}} \leq \mu_x \leq \hat{\mu}_x + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}}\right) = 1-\alpha}$$

وبطول القيم بتعوضها ($Z_{\alpha/2}$) من جدول Z .

2 Confidence Interval on the Mean (Variance Unknown) :-

$$P\left\{\hat{\mu}_x - t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_x^2}{n}} \leq \mu_x \leq \hat{\mu}_x + t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_x^2}{n}}\right\} = 1-\alpha$$