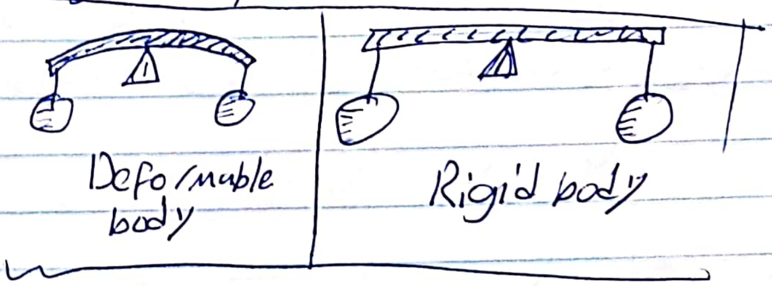
Chapter 3

Rigid Bodies
Equivalent Systems of Forces

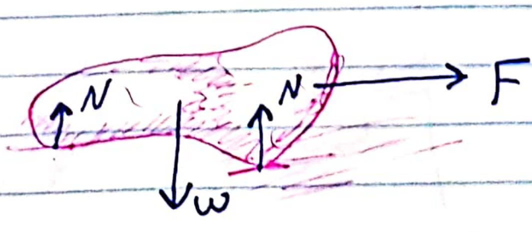
لا يمكن دوماً معاملة الجسم كجسم نقطي (Particle) ذلك بسبب شكله
للاجسام أحياناً اذا لم تكن Rigid



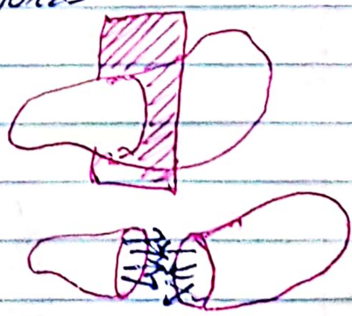
(Ex/in)ternal Forces

- External forces: are the shown in Free-body diagram
  if the force is unopposed (لا يوجد ما يعادلها) it can
  make a motion of ((translation / Rotation / Both))

- internal Forces ~~the~~ do not make motion but it keeps
  the body conected such as chemical bonds



external Forces


internal force

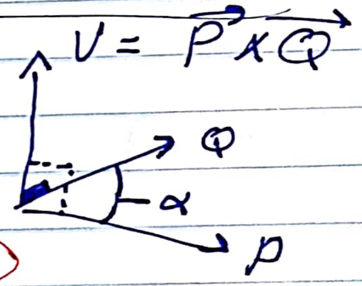
Cross Product / vector product

⚠ Note From Bessars solution of Problem 2-113

You can Find the unit vector that is pependicular on a plane by aplying the cross product on any two vectors on that plane and then divide the resulting vector on it's magnitude

Such that Example $\boxed{BN}$ in the coming page

$\vec{V} = \vec{P} \times \vec{Q}$



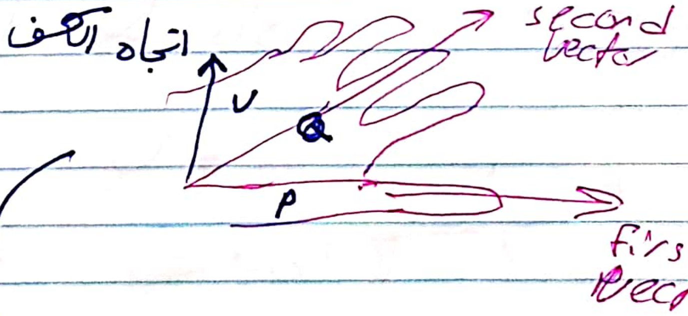
$V \perp P$

$V \perp Q$

$|V| = |Q||P| \sin \alpha$

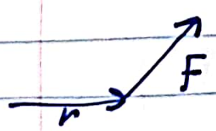
direction of V by right hand rule

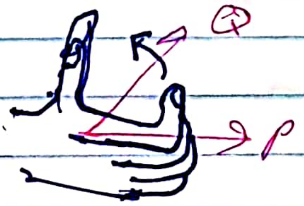
بعض الحالات
مثل العزم يمكنه
انه يكون لها
قاعدة يد يمنى
خاصة بها



هذه الحالة خاصة
لمتجه ذيل رأس

ذيل لذيل





ضع اصابعك باتجاه
F ولف
يدك
تلف F الى r
يكون اتجاه العزم
باتجاه الابهام

اتجاه الاصابع مع المتجه
الاول ثم نلفها إلى المتجه
الثاني ويكون الناتج
باتجاه الابهام

⚠ Vector product → not commutative :-

$$\vec{Q} \times \vec{P} = -(\vec{P} \times \vec{Q})$$ ((the direction))

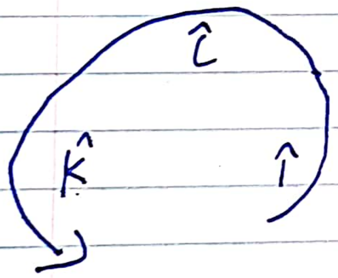
→ distributive

$$P \times (Q_1 + Q_2) = (P \times Q_1) + (P \times Q_2)$$

→ ~~not~~ associative

$$(P \times Q) \times S \neq P \times (Q \times S)$$

Rectangular components



$$\left.\begin{aligned} \hat{j} \times \hat{i} &= \hat{k} \\ \hat{i} \times \hat{k} &= \hat{j} \\ \hat{k} \times \hat{j} &= \hat{i} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \hat{i} \times \hat{j} &= -\hat{k} \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

First way

~~P×P~~ $\hat{i} \times \hat{i} = 0$ / $\hat{j} \times \hat{j} = 0$ $\hat{k} \times \hat{k} = 0$

we can use right hand rule

second way

For a vector with 3 Rectangular comp.
we can use ((المحددات)) المحددة
لانها تسهل كثيرا

$+ - +$

المتجه الاول و الثاني -

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} = \vec{P} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} +\hat{i} & -\hat{j} & +\hat{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(P_y Q_z - P_z Q_y)$$
$$- \hat{j}(+Q_z P_x - P_z Q_x)$$
$$+ \hat{k}(P_x Q_y - P_y Q_x)$$

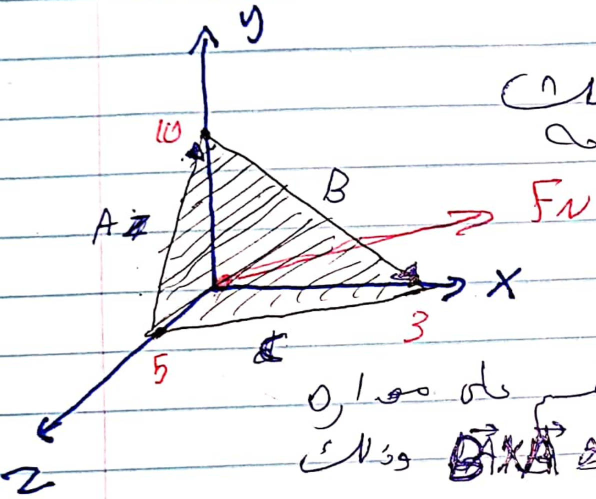
الترتيب مهم

قطر رئيسي - قطر ثانوي

الترتيب يسار

EXAMPLE BN

اذا علمت ان قوة التلامس العمودية عمودية دوماً على السطح :
اوجد متجه الوحدة باتجاهها



نضرب اي متجهين من هذا المثلث يعطي متجه عمودي على مساحة ومقداره مقدار مساحة المثلث

الخطة : نجد $\vec{A} \times \vec{B}$ ثم نقسم على مقداره لكن الأفضل اختيار $\vec{B} \times \vec{A}$ وذلك لان الاتجاه للاعلى

$$A = -5\hat{k} + 10\hat{j}$$

$$B = -10\hat{j} + 3\hat{i}$$

$$\vec{B} \times \vec{A} = \begin{array}{c} \\ B \\ A \end{array} \begin{vmatrix} +\hat{i} & -\hat{j} & +\hat{k} \\ 3 & -10 & 0 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix} = \hat{i}(50) - \hat{j}(-15) + \hat{k}(30)$$

$$= 50\hat{i} + 15\hat{j} + 30\hat{k}$$

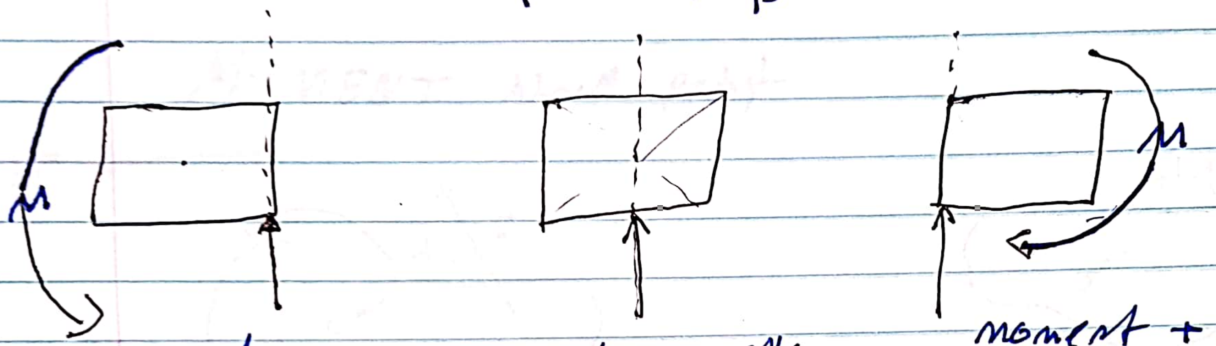
$$\lambda = \frac{\vec{B} \times \vec{A}}{|\vec{B} \times \vec{A}|} = \frac{50\hat{i} + 15\hat{j} + 30\hat{k}}{\sqrt{50^2 + 15^2 + 30^2}}$$

$$\frac{50}{60}\hat{i} + \frac{15}{60}\hat{j} + \frac{30}{60}\hat{k}$$

$$= 0.83\hat{i} + 0.25\hat{j} + 0.5\hat{k}$$

MOMENT OF FORCE ABOUT A POINT

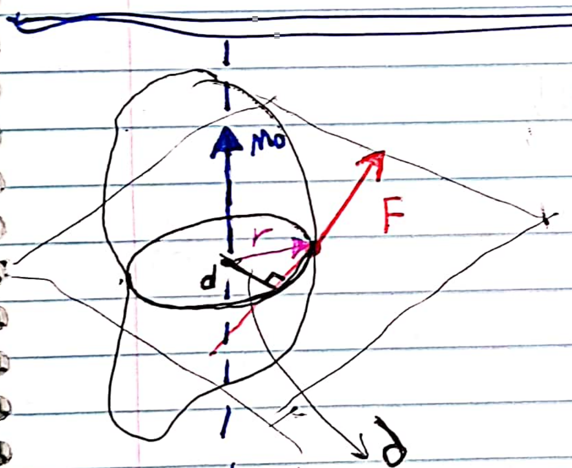
نقطة تأثير القوة مهمة جداً حيث منه الممكن ان تؤثر القوة
حركة دورانية (عزم / moment)



moment + some translation

No moment but translational movement

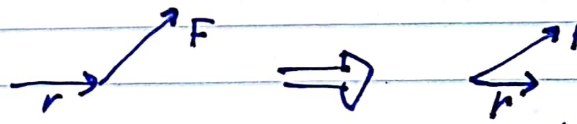
moment + some translation



$$\boxed{M_o = \vec{r} \times \vec{F}}$$

$M_o \perp F$
$M_o \perp r$

$|M_o| = |r||F| \sin\theta$



راس لذيل

وضع ذيل لذيل

تذكر ان r منه محور الدوران الى نقطة تأثير القوة

$$\boxed{M_o = F d}$$ $: d = r \sin\theta$

d : ذراع القوة

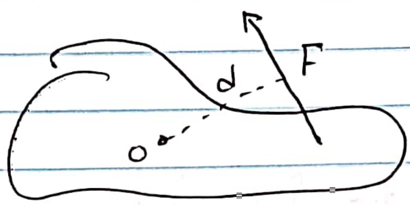
وهو المتجه العمودي على القوة ويبدأ منه محور الدوران وينتهي مع خط عملها

$F \times R \neq M_o = r \times F$ مهم ⚠

1

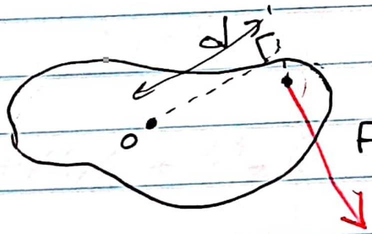
⚠ if any force F' "has" the same magnitude and direction as F, is equivalent if it also has the same line of action when it has the same line of action then they make the same moment

MOMENT About point



$M_o = +Fd$

عكس عقارب الساعة

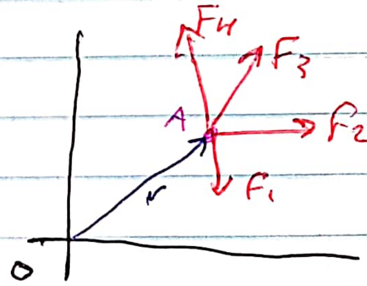


$M_o = -Fd$

مع عقارب الساعة

Varignon's Theorem

the moment around a point O of the resultant of several concurrent forces is equal to the sum of the moments of the various moments about same point O

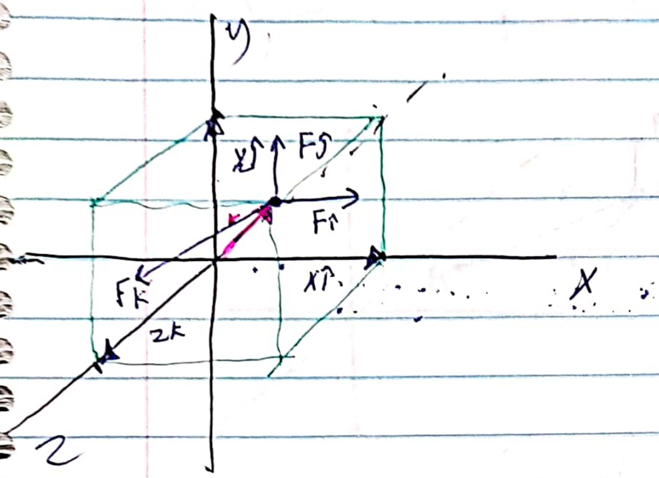


$$M_o = r \times F_1 + r \times F_2 + r \times F_3 + r \times F_4$$

$$= r(F_1 + F_2 + F_3 + F_4)$$

$$= r \times F_{net}$$

Rectangular components of the moment of a Force



$$r = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$F = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$$

مهم جداً :- اتجاه r هو من النقطة O إلى القوة وليس العكس

$$M_O = M_x\hat{i} + M_y\hat{j} + M_z\hat{k}$$

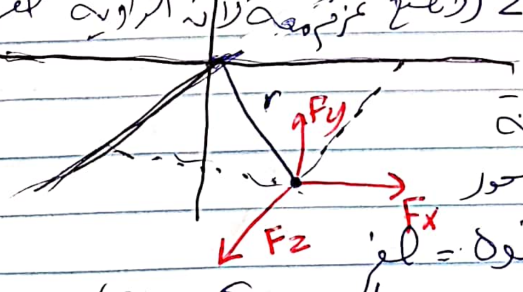
$$M_O = \begin{matrix} r \\ \times \\ F \end{matrix} \begin{vmatrix} +\hat{i} & -\hat{j} & +\hat{k} \\ x\hat{i} & y\hat{j} & z\hat{k} \\ F_x\hat{i} & F_y\hat{j} & F_z\hat{k} \end{vmatrix} = \hat{i}\left(y\hat{j}\,F_z\hat{k} - z\hat{k}\,F_y\hat{j}\right)$$

$$+\hat{j}\left(F_x\hat{i}\,z\hat{k} - x\hat{i}\,F_z\hat{k}\right)$$

$$+\hat{k}\left(x\hat{i}\,F_y\hat{j} - y\hat{j}\,F_x\hat{i}\right)$$

اذا سألت هل يمكن للقوة F انها تصنع عزم حول y انظر للمركبة الصادية للعزم $M_y\hat{j}$ اذا كانت صفر اذا لا

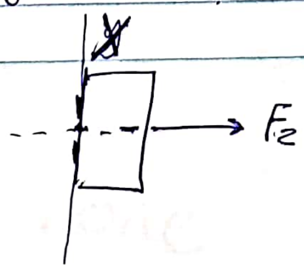
ملاحظة دكتور



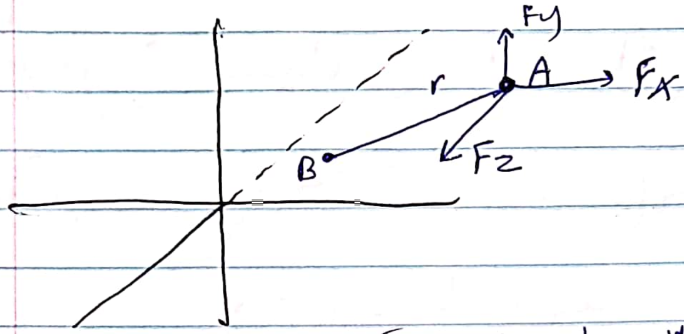
F_z لا تصنع عزم moment إلا حول y ذلك لأنها توازي z (لا تصنع عزم قيمة لأن الزاوية صفر) وتقطع X اي ان المسافة العمودية بين محور الدوران و القوة = صفر

مثل ما تسحب باب عكس اتجاه المفصل

~~تصنع حول~~



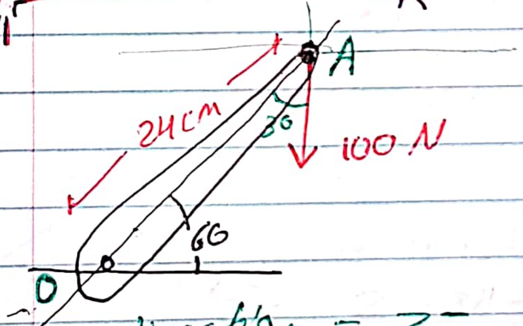
ممكن تكون النقطة التي يدور حولها الجسم ليست نقطة الاصل بالتالي المتجه r ليست احداثيات الجسم Particle



$$r_x = (A_x - B_x)$$
$$r_y = (A_y - B_y)$$
$$r_z = (A_z - B_z)$$

ثم نكمل كما المعتاد

sample problem



direction = Z^-

Find according to these information shown on the diagram :-

a) moment about O
b) horizontal force that create the same moment
c) smalest force to make same moment
(d) location for 240 N force to create same moment
e) whethe of the forces in b, c, d is equivicant to the original force

a) $r \times F = rF\sin 30 = \dfrac{12}{i}$ N.M

b) $r \times F \sin(30+90) = 24 \sin 120$
$= 20.8$ N.M

c) r is constant then we should change $F / \sin\theta$

$F = M_o / r\sin\theta \rightarrow F' = \dfrac{r\cos\theta}{M_o}$ 90

when $\theta = 90$ then F is the smalest

$F = \dfrac{0.24}{12} \Rightarrow F = \dfrac{12}{0.24} = 50$ N

d) $rF\sin\theta = 240 r_2 \cancel{\sin 30} = 24$

$r_2 = \dfrac{24}{240} = \dfrac{1}{10}$ m $= 10$ cm

e) none

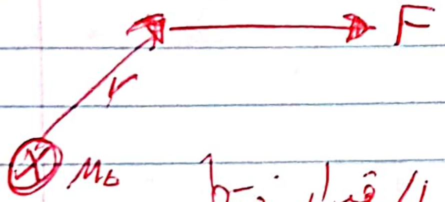
Important

حل السؤال السابقة

← فرع (a) لا تتهور في اخذ الزاوية 60
لانه الزاوية المحصورة بين r و F

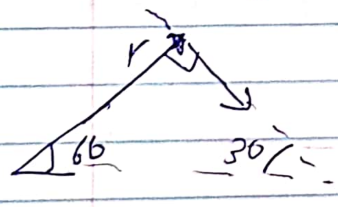
← فرع (b) تذكر الطلب القوة وليس اتجاهها

اذا لم ؟ للحصول على نفس العزم يجب أن
يكون اتجاه القوه لليمين $+x$



← ايضاً فرع (c) لم يطلب المقدار فقط
المقدار = 50 صحيح لكن الاتجاه؟

الاتجاه = -30°

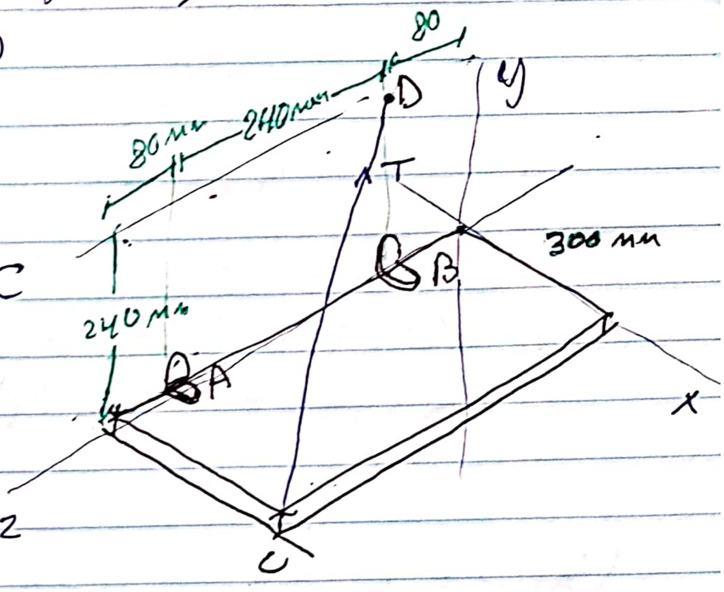


تذكر انه 150 غير ممكنة
لانه اتجاه ~~العزم~~ العزم $-z$

← الفرع (d) واضح 10cm نبدأ عند O
10 cm about (O)
ادرسها بالاحداثيات

Sample Problem

the rectangular plate is supported by the brackets at A & B And by the wire ~~B~~CD knowing that the tension in the wire is 200 N determine the moment about A of the Force exerted by the wire at C



we need position vector R such that it's tail is on point A and head on C

$$\vec{AC} = 0.3m\,\hat{i} + 0.08m\,\hat{k}$$

$$T = ? = |T|\lambda \rightarrow \lambda = ? = \frac{CD}{|CD|}$$

$$\lambda = \frac{-0.3\hat{i} + 0.24\hat{j} - 0.32\hat{k}}{\sqrt{0.3^2 + 0.24^2 + 0.32^2}} = -0.6\hat{i} + 0.48\hat{j} - 0.64\hat{k}$$

$$\vec{T} = 200\lambda = -120\hat{i} + 96\hat{j} - 128\hat{k}$$

$$\tau = \begin{array}{c} \\ \vec{AC} \\ \vec{T} \end{array} \begin{vmatrix} +\hat{i} & -\hat{j} & +\hat{k} \\ 0.3 & 0 & .08 \\ -120 & 96 & -128 \end{vmatrix} = -7.68\,\hat{i} + 28.8\,\hat{j} + 28.8\,\hat{k} \text{ N.m}$$

Also R can be R AD / R AC

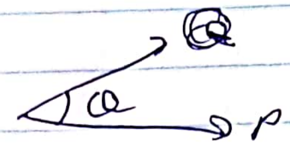
R is Any vector from the point to the ((line of action of the Force))

$$r_{AD} = 0.24\hat{j} ~~+ 240\hat{k}~~ - 0.24\hat{k}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & .24 & -0.24 \\ -120 & +96 & -128 \end{vmatrix} = \text{gives the same Answer}$$

scaler product / dot product

$$\vec{P}\cdot\vec{Q} = \vec{Q}\cdot\vec{P} = |Q||P|\cos\theta$$



خواص

- commutative $P.Q = Q.P$ = كمية قياسية
- distributive $P.(Q_1+Q_2) = P.Q_1 + P.Q_2$
- not associative → $(P.Q).S$ ~~0~~ /0/

المركبات المتعامدة

$$\vec{P}\cdot\vec{Q} = (P_x\hat{i} + P_y\hat{j} + P_z\hat{k})\cdot(Q_x\hat{i} + Q_y\hat{j} + Q_z\hat{k})$$

$$= P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z$$ المتشابهات

لا تنس انها قياسية

فقط حيث الزاوية 180/0

$$\hat{i}\cdot\hat{i} = 1 \;/\; \hat{i}\cdot\hat{j} = 0 \;/\; \hat{i}\cdot\hat{k} = 0$$
$$\hat{j}\cdot\hat{j} = 1 \;/\; \hat{j}\cdot\hat{k} = 0$$
$$\hat{k}\cdot\hat{k} = 1$$

$$\vec{P}\cdot\vec{P} = |P|^2$$

بعض الاستخدامات (Dot Product)

* ايجاد زاوية بين متجهين

$$\vec{P}\cdot\vec{Q} = PQ\cos\theta$$
$$\rightarrow \theta = \cos^{-1}\frac{\vec{P}\cdot\vec{Q}}{|P||Q|}$$

* ~~ايجاد مركبة~~ اسقاط متجه على محور معين

Projection of vector on a given axis

الشرح في الصفحة التالية

مثال:

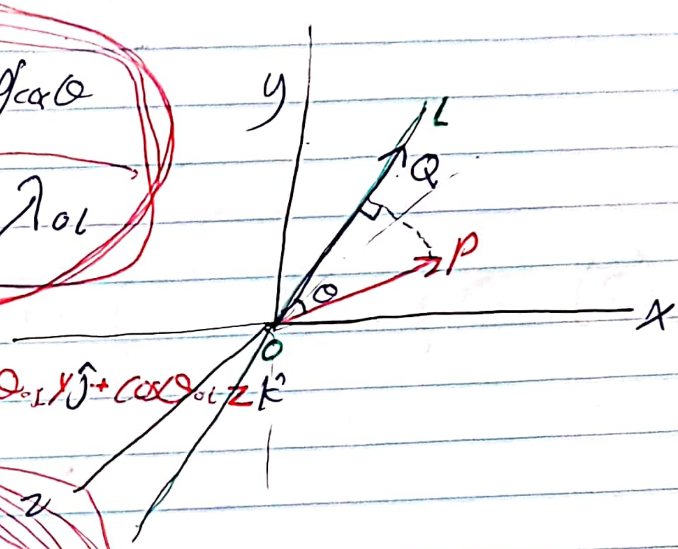
Find the Projection of P along OL

أوجد

~~P.Q~~

Projection along OL = $|P|\cos\theta$

$$= \frac{P \cdot Q}{|Q|} = P \cdot \lambda_{OL}$$



but $\lambda = \cos\theta_{OLx}\hat{i} + \cos\theta_{OLy}\hat{j} + \cos\theta_{OLz}\hat{k}$

$P_x\cos\theta_{OLx} + P_y\cos\theta_{OLy} + P_z\cos\theta_{OLz}$

تذكر انه متجه الوحدة هو $\Sigma\cos$ الزوايا بين المحاور والمتجه

يمكن بسهولة حل ذلك دون الحفظ

مثلاً تم طلب (Projection of P on OL)

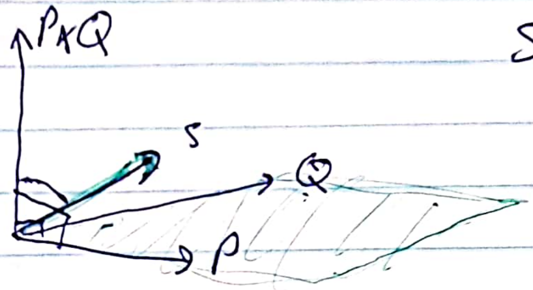
نحن نعرف انها ($P\cos\theta$)

نعرف انه $\frac{P \cdot \vec{OL}}{|OL||P|} = \cos\theta$

اذاً

$$P_x\cos\theta = \frac{P \cdot \vec{OL}}{|OL|} = P\lambda_{OL}$$

Mixed Triple Product of 3 Vectors



$S.(\vec{P} \times \vec{Q}) = \text{scaler}$

$$\boxed{\vec{S}.(\vec{P} \times \vec{Q}) = \vec{P}.(\vec{Q} \times \vec{S}) = \vec{Q}.(\vec{S} \times \vec{P})}$$

Remember :- $\vec{P} \times \vec{Q} = -\vec{Q} \times \vec{P}$

then :- $= \boxed{-\vec{S}.(\vec{Q} \times \vec{P}) = -\vec{P}.(\vec{S} \times \vec{Q}) = -\vec{Q}(\vec{P} \times \vec{S})}$

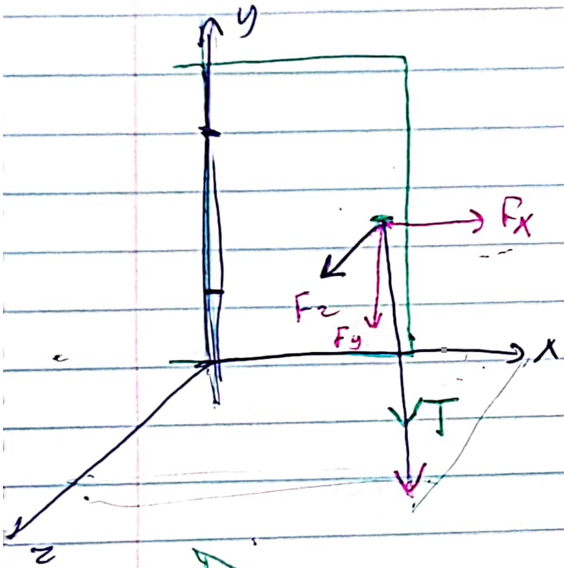
yes there's also a solution for cartesian vectors

$$\vec{s}.(\vec{P} \times \vec{Q}) = \begin{array}{c|ccc|} & \hat{i} & \hat{j} & K \\ \vec{S} & S_x & S_y & S_z \\ \vec{P} & P_x & P_y & P_z \\ \vec{Q} & Q_x & Q_y & Q_z \end{array}$$

نفس الـ Cross product لكن بدل îĵk في الصف
الحل نضع مركبات المتجه الذي سيضرب أوله
نقطي

Moment of a Force about a given axis

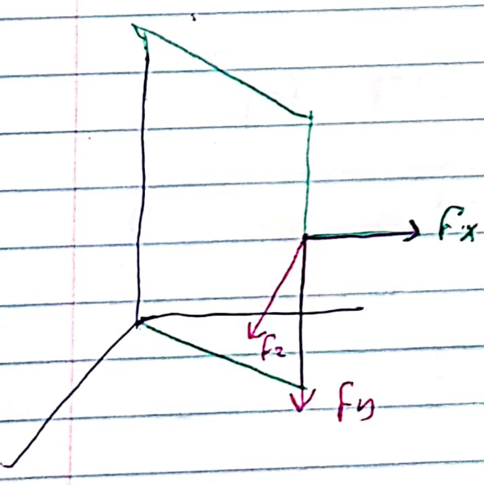
عندما يكون العزم حول محور محدد وليس نقطة ذلك
يعني انه ~~العزم~~ اي عزم اخر حول اي محور اخر غير هذه النقطة
ملغي مثل اذا فتحت كان الباب بزاوية



in this case the component F_z make $M_{o(y)}$

F_x does'nt becase $\sin\theta = 0$

F_y " " " it is (Parallel to the axis of rotation)



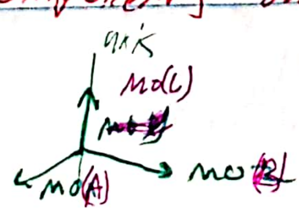
only F_x and F_z

but what can we do when the axis of rotation is not x, y or z

1 we can find the rectangular component acording to that axis which is ~~a~~ hard

(2)(A) Find the moment about ~~#~~ a Point of the axis

(B) ignore the component's that are perpendicular to the axis



notice we just need $M_{O(L)}$ whic is the Projection of M_O in the direction of (L)

that means ~~$M_O \cdot \lambda_L$~~

$$|M_O| \cos\theta_{(L)} = \frac{\vec{M_O} \cdot \vec{L}}{|L|}$$

$$= \boxed{M_O \cdot \lambda_L} = \lambda \cdot (r \times F)$$

So (1) Find M_O around a point that lies on the axis

(2) Find λ_{axis}

(3) Find $M_O \cdot \lambda_{axis}$

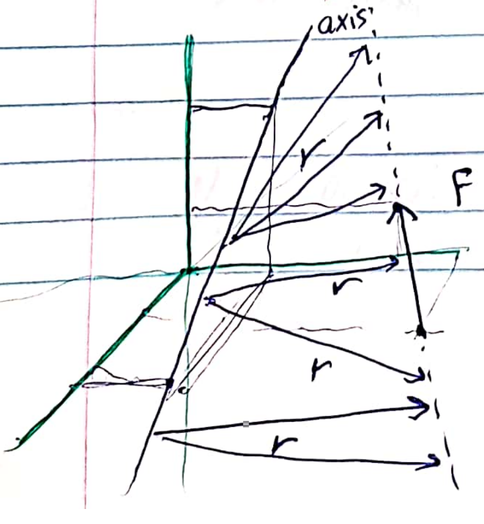
or by cartesian :

$$\begin{array}{c|ccc|} \lambda_{axis} & \overset{\cos\theta_x}{=\lambda_x} & \overset{\cos\theta_y}{=\lambda_y} & \overset{\cos\theta_z}{=\lambda_z} \\ r_{point} & r_x & r_y & r_z \\ F & F_x & F_y & F_z \end{array}$$

المسافة بينه اي نقطة على المحور واي نقطة على line of action of the force

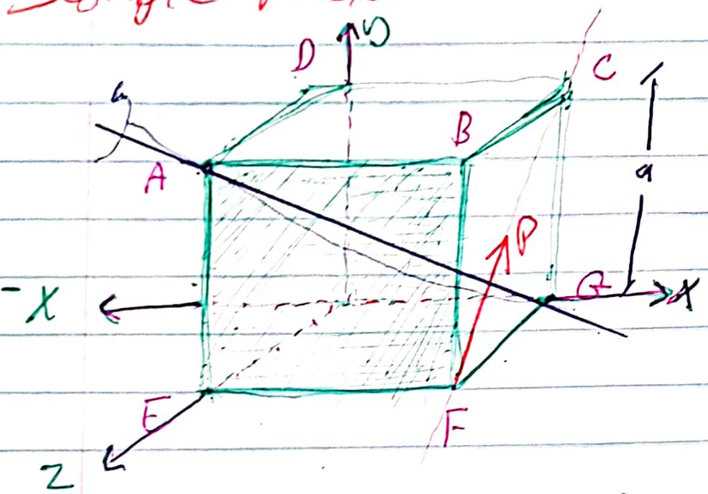
اذا كانت النتيجة موجبة يكون اتجاه ~~العزم~~ العزم مع اتجاه λ

اذا كانت سالبة يكون عكس اتجاه λ



انتبه انه بداية المتجه $\vec{r}$ من النقطة المفترضة على الـ Axis ونهايتها على line of action of force

Sample Problem A cube is acted on by a force P as shown determine the moment of P



(a) about A
(b) " edge AB
(c) " diagonal AG of the cube
(d) determine the perpendicular distance between AG & FC

(a) $R = \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC}$ $= a\hat{j} + a\hat{i}$ / $F = -P\sin 45\,\hat{k} + P\sin 45\,\hat{j}$

$$R \times P = \begin{array}{c} \\ R \\ P \end{array}\begin{vmatrix} \hat{i} & -\hat{j} & \hat{k} \\ +a & \cancel{a} & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} (P\sin 45)(a)$$

دوماً من النقطة R
إلى القوة

$$= (+\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})(Pa\sin 45)$$

(b) about edge $\overrightarrow{AB}$ then we need the x component only
the component that is perpendicular to the axis of rotation
or easily we can say $\frac{\overrightarrow{AB}\cdot M}{|AB|} = \cancel{\frac{a\hat{i}}{|a|}}$ $\cancel{\frac{a\hat{i}}{|a|}}\cdot M$

$= M\cdot\hat{i} = M_x = Pa\sin 45$

(c) Find the $\lambda_{AG} = \frac{\overrightarrow{AG}}{|AG|} = \frac{\hat{i}a - a\hat{j} - a\hat{k}}{\sqrt{3}a}$

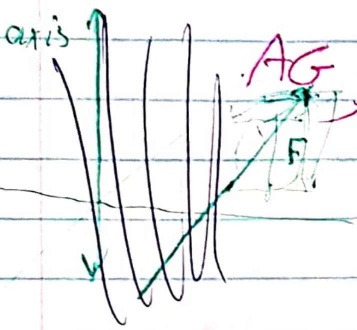
find $M_A = (\hat{i} + \hat{j} + k)(Pa\sin 45)$

$M_A \cdot \lambda_{AG} = M_{AG} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) Pa\sin(45)$

$= \frac{-Pa\sin 45}{\sqrt{3}}$

(d) the perpendicular distance ??
it's also the shortest distance if you ~~were~~ asked

الناظمة بالقوة



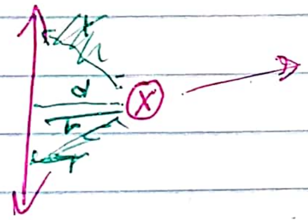
اذا استطعت إلغاء المركبة الموازية للمحور AG

عندها تكونه $\vec{AG} \perp P_{\text{مركبة}}$

وحينها تكون العزم على المحور

هو نفسه العزم على النقطة العمودية

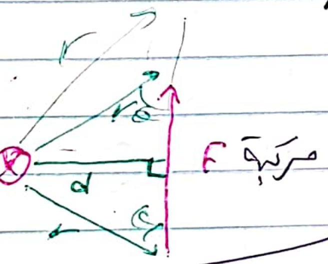
بالرسم التالي



$M_{AG} = F_{\text{مركبة}}\, d = \cancel{F \ldots}$ العواب السابق

$M_{AG} = F_{\perp AG} * d =$

الآن يجب ان نجد قيمة المركبة العمودية



$$\vec{F} = \vec{F}_{AG} + \vec{F}_{\perp AG}$$

$$\vec{F} = \lambda_{AG} \cdot F + F_{\perp AG}$$

$$\left(\frac{\hat{i}}{\sqrt{3}} - \frac{\hat{j}}{\sqrt{3}} - \frac{\hat{k}}{\sqrt{3}}\right) \cdot \left(-P\sin 45\,\hat{k} + P\sin 45\,\hat{j}\right)$$

$$= \cancel{\frac{+\sin(45)P}{\sqrt{3}} - \frac{\sin 45\, P}{\sqrt{3}}} \qquad P \parallel AG = 0$$

$$\rightarrow P \perp AG = P$$

في حال $P \parallel AG$ لم تكن (0) نجد $P_{\perp AG}$

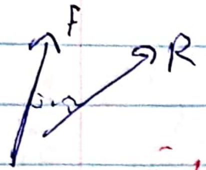
عن طريقة فيثاغورس $|P| = \sqrt{P_{\perp}^2 + P_{\parallel}^2}$

then $\cancel{P \perp A}$ $(P_{\perp AG} * d) =$ العزم حول المحور

$$d = \frac{Pa\sin 45}{\sqrt{3}\,\cancel{P}}$$

$$d = \frac{a\sin 45}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

عندما يطلب مسافة عمودية بين متجهين مختلفين



1) ~~نجد مركبة المتجه الأول العمودية على الثاني~~

2) نضرب متجهي بين المتجه الأول والمسافة وأي مسافة بينه وبين اي نقطة على الثاني

$(\vec{F}\times\vec{F})\cdot\lambda$

ثم نضرب تقاطع مع λ المتجه الثاني

او مع البداية

$$\begin{vmatrix} \lambda \\ r \\ F \end{vmatrix} = \tau$$

3) نجد المركبة العمودية للمتجه الأول على الثاني حيث نضرب تقاطع بين المتجه الأول و λ الثاني

$F\cdot\lambda$

وهكذا نجد المركبة الموازية ثم نطرحها ونجد العمودية

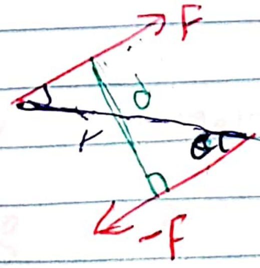
س) $\tau = F_\perp \times d$

ع) نقسم على $F_\perp$

[redacted]

Moment of a couple

the couple are 2 forces that one is the same magnitude and opposite direction

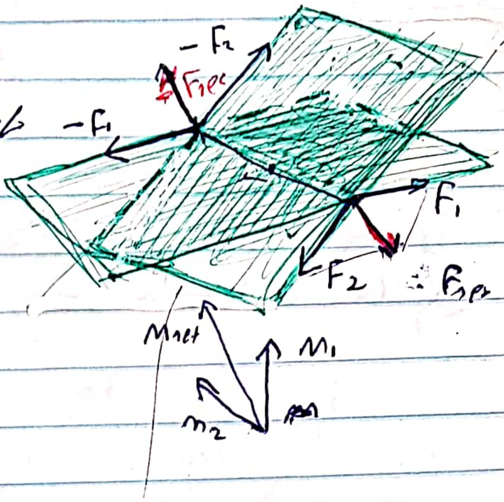


moment about any point ~~between the line of action of F and the line of action of -F~~ is equal to Fd or Fr sinθ ($\vec{r}\times\vec{F}$)

$\boxed{\text{the couble is Free vector}}$

(1) لا يعتمد على F / -F / point(O)

Addition of couples



even find Fnet and -Fnet for the couples
and then find the
moment

or find M_1 & M_2
then adding
as vectors

$M_1 = \cancel{F_1 \times} \; \vec{r} \times F_1$

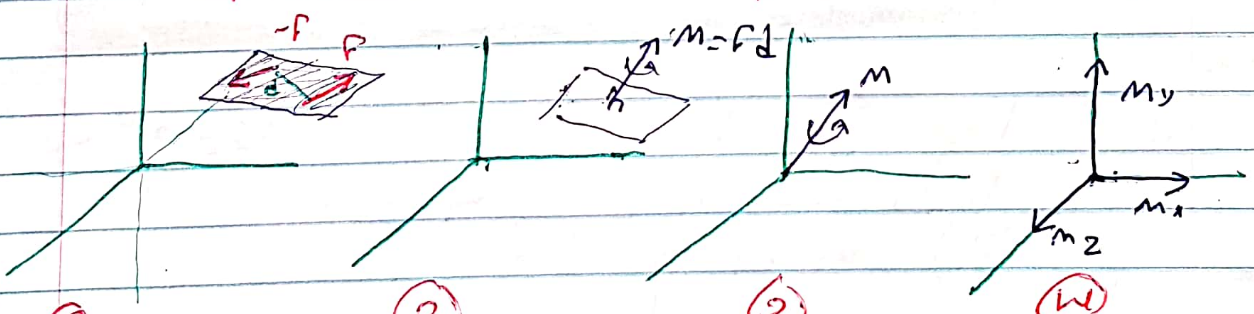
$M_2 = \vec{r} \times F_2$

$M_c = \vec{M_1} + \vec{M_2}$

$(r \times F_1) + (r \times F_2)$

$r(\vec{F_1} + \vec{F_2})$

couples can be represented by vectors



1 2 3 4

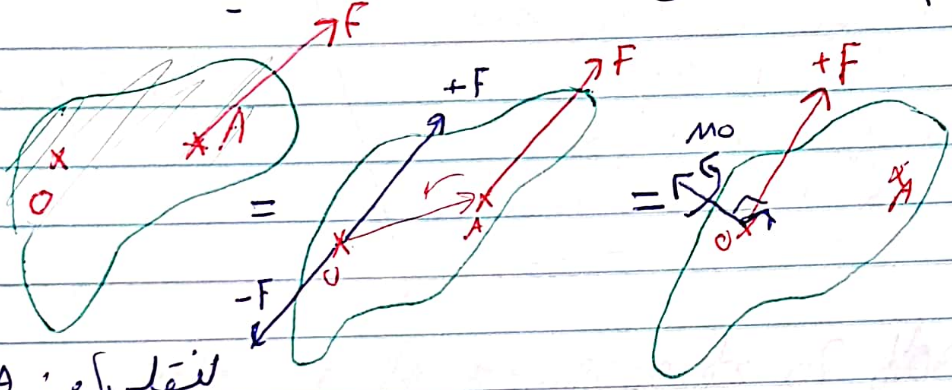
1 ~~go~~ 2 magnitude & direction ~~coutl~~ forces

2 & 3 point of aplication is not significant
Free vector

4) can be resolved into components

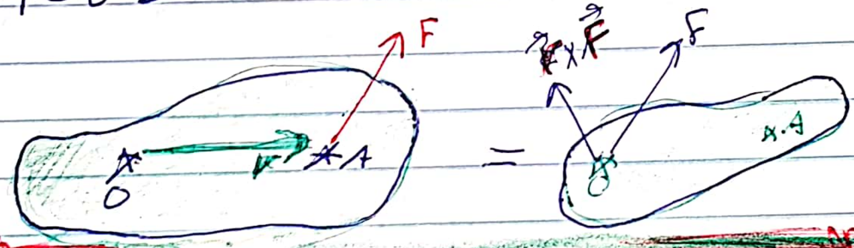
resolution of a Force into a Force at O and a couple

لننقل موقع/نقطة تأثير اي قوة نحتاج لعزم مساوي لعزم هذه القوة O عند النقطة الجديدة



لننقلها من A لـ O

نضيف F+-F عند O



او

$$\boxed{F \text{ at } O = F \text{ at } A + \vec{r}_{A\to O} \times \vec{F}}$$

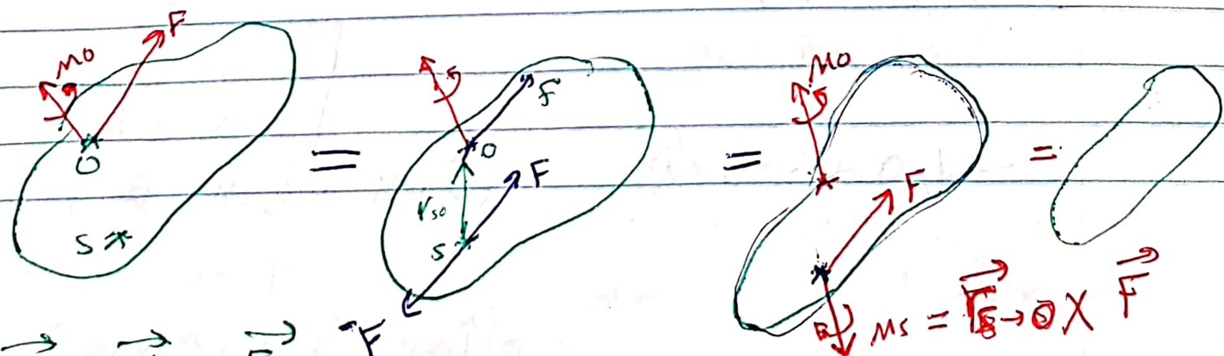
$r_{O\to A}$

لاحظ اتجاه $\vec{r}$ من النقطة الجديدة إلى القديمة

او انك ستحتاج لرسم القوتين المتعاكستين (F -F) عند O ثم ملاحظة الاتجاه

فرضاً طلبنا نقل القوه من نقطة "O" إلى S ماذا نفعل

نفس الشيء ونجمع الـ Moment جمع لانه Free.V

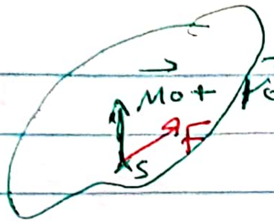


$\vec{M}_s = \vec{r}_{S\to O} \times \vec{F}$

$= \vec{M}_o + \vec{M}_s + \vec{F}$

هذا الكلام غير ممكن إلا إذا كانت
$M_o \perp F_{net}$

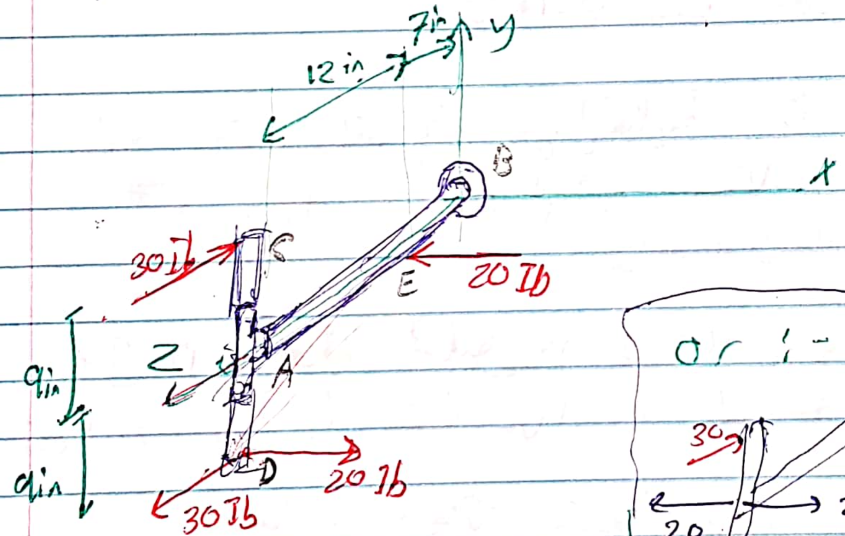
$$= \vec{M}_{o+} \vec{r}_{os} \times \vec{F}$$



إذا طلب محصلة
قوى حول نقطة واحده
بحيث يوجد Moment
نجد عزم كل تلك القوى
حول نقطة اسناد مثل الأخرى
هكذا تكون نقلنا المحصلة
حول تلك النقطة
ثم ننقلها مرة أخرى
الى نقطة أخرى حيث $M_{new} = 0$

العزم صحيح بعكسه
جهة متجها
Free vector الأ

SAMPLE determine the components of the single couple equivalent to the couples shown



first way

$$r_{D\to E} = 9\hat{j} + -12\hat{k}$$
$$F_E = -20\hat{i}$$

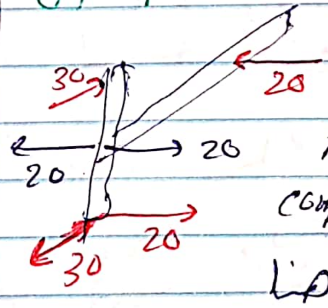
$$r \times F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 9 & -12 \\ -20 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \boxed{0\hat{i} + 240\hat{j} + 180\hat{k}}$$

$$+ M_D = -540\hat{i}$$

$$= (-540\hat{i} + 180\hat{k} - 240\hat{j})\ lb\cdot in$$

or :-

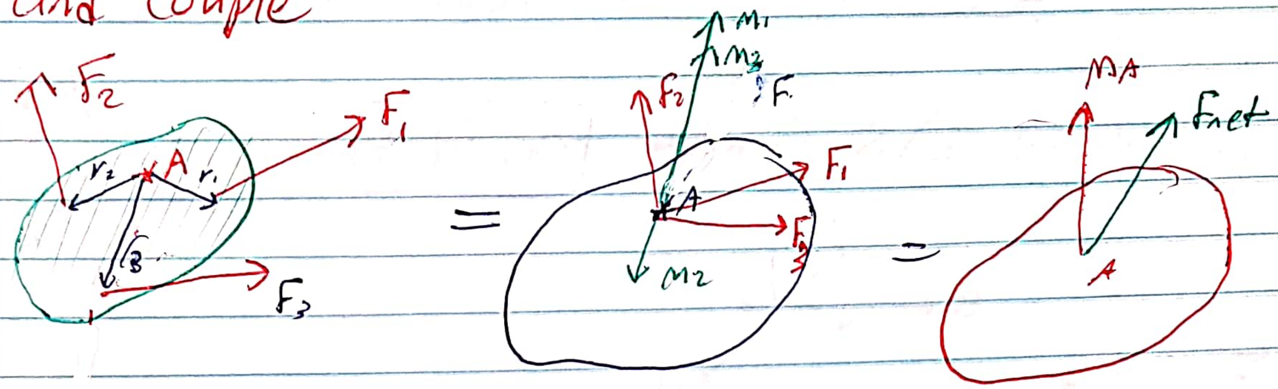


نضيف ± 20 عند A
حيث ننقل الـ couple
فذلك سهل هنا
لأنه اتجاهات القوى مع
المحاور حالات أخرى لا تنفع فيها
الا الطريقة الأولى

$$= 240\hat{j} + 180\hat{k} - 540\hat{i}$$

سهل هنا فعل ذلك
لأن القوى في مستويات
سهلة و موازية للمحاور

System of Forces reduction to a Force and couple



$$M_1 = \vec{r}_{1\,(A\to F_1)} \times \vec{F_1}$$
$$M_2 = \vec{r}_{2\,(A\to F_2)} \times \vec{F_2}$$
$$M_3 = \vec{r}_{3\,(A\to F_3)} \times \vec{F_3}$$

$$= \vec{M_1} + \vec{M_2} + \vec{M_3} + \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}$$

قد يسأل عن نقطة حيث ($\Sigma M=0$)

نعين نقطة B في الفراغ ثم ننقل محصلة Fnet من A إلى B لكن بشرط $-M_A = r_{A\to B} \times F$
حتى تكون $\Sigma M=0$

نشتغل على القوة المحصلة والعزم المحصل وهنا أسهل من انه نشتغل على ٣ قوى

اذا طلب نقطة بحيث تكون المحصلة فيها لا تصنع عزم نجد في البداية اي نقطة تكون المحصلة فيها تصنع عزم ثم نجد النقطة الثانية لانه التعامل مع قوة واحدة أسهل من التعامل مع عدة قوى

لا يمكن استبدال القوى بقوة واحدة محصلة دون couple/Moment إلّا

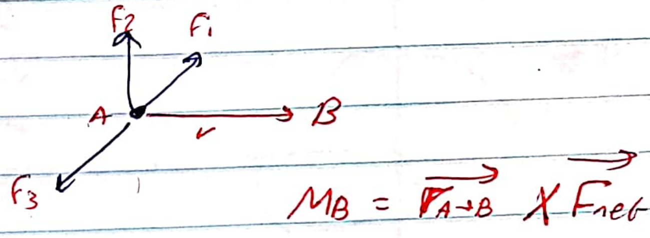
اذا كانت Moment $\perp$ F

اي انه $\vec{M} \cdot \vec{F} = 0$

لكي تكون ($\vec{M} \perp \vec{F}$) وتستطيع استبدالها بـ (Force) بدونه Moment

يجب ان تكون احد هذه الحالات :-

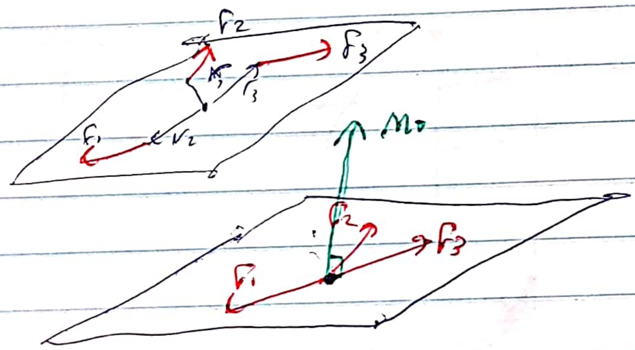
1 $\boxed{\text{Concurrent Forces}}$ even in 2/3 Dimensions



$M_B = \vec{r}_{A\to B} \times \vec{F}_{net}$

then $M_B \perp F_{net}$

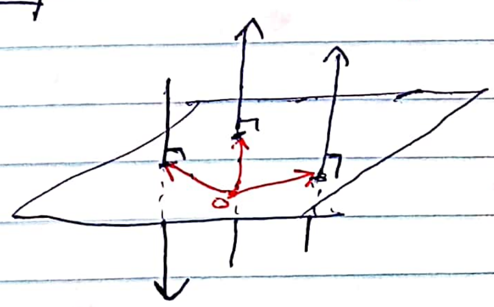
2 $\boxed{\text{Co-planer Forces}}$



اذن نستطيع استبدالها بقوة ← $M_o \perp (F_1 + F_2 + F_3)$

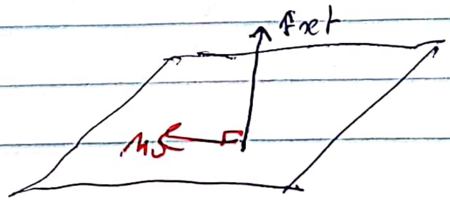
واحدة عند O دونه moment

3 $\boxed{\text{Parallel Forces}}$ even in 3D/2D



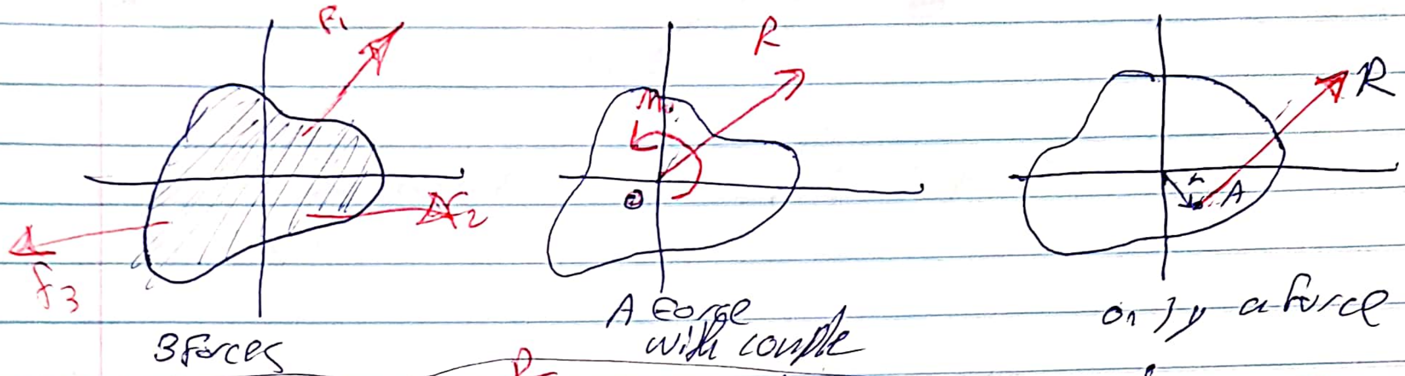
the Moment here is always in the plane that is perpendicular to the Force that means

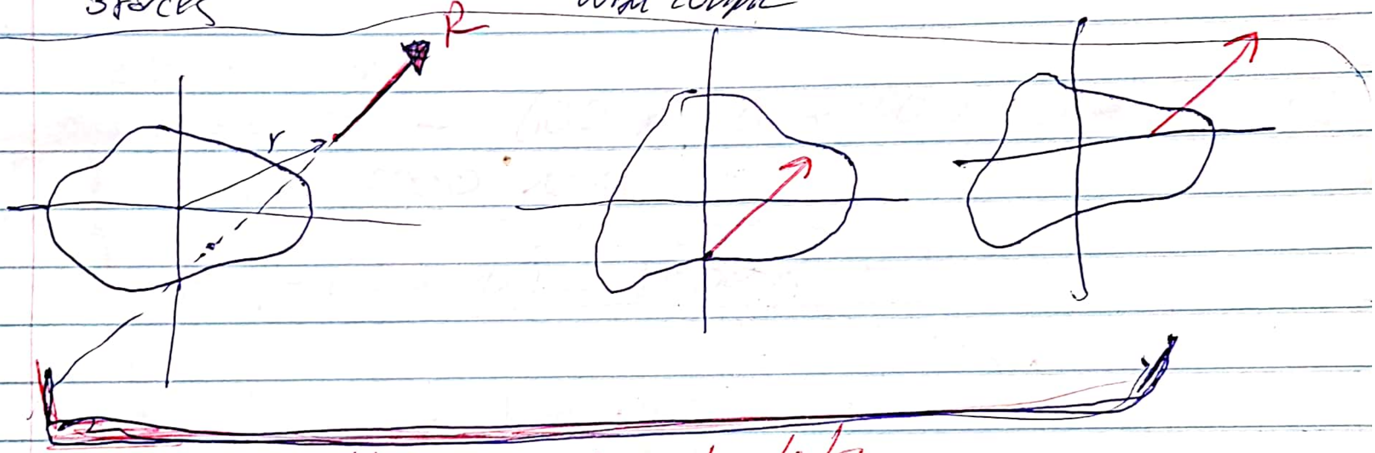
$M_{net} \perp F_{net}$



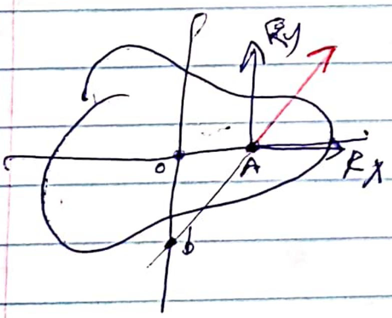
لو كانت القوى في حالة نحرك كل تلك الحالات مستحيل نقلها لنقطة دون moment

اي انه لا يوجد نقطة واحدة تؤثر فيها كل تلك القوى بدون moment





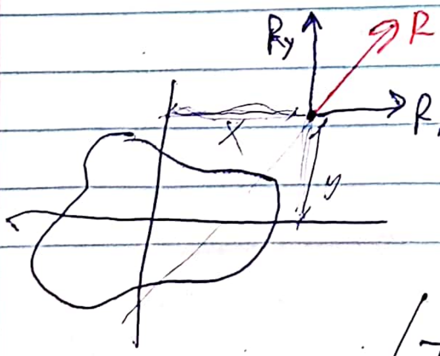
Principle of transability
and we won't need any moment



$M_o^R = R_y * X$

$M_{b/o} = -Y * R_x$

مش الهدف بس نذكر هو مفيد نكمل التحليل!

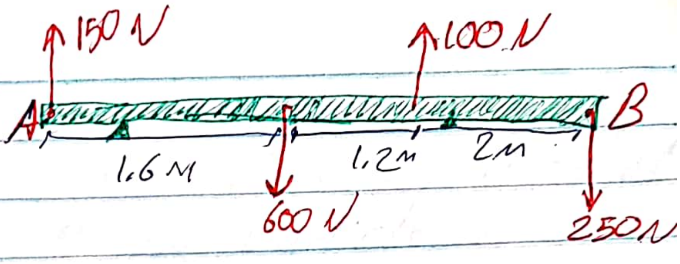


$M_o = XR_y - YR_x$

(+/-) from Right hand

Sample

For the beam reduce the system of Forces to (A) an equivilant couple force system at A



(B) equivilant couble Force system at B
(C) single Force or resultant

note: the reaction of the suports are not included

(A) $\Sigma F = -600\ N$

$M_A = 0 - 600 * 1.6 + 100 * 2.8 - 250 * 4.8$

$= -2000\ N.m$

$= \boxed{-600\ N\ \hat{j} - \cancel{1}880\ N.m\ \hat{k}}$

بدل ما نكلف بسطها
نحط ΣF
لكل القوى
احنا نحسب
عزم كل القوى
عندها في
النقطة
الدوران

(B) الان نشتغل على النتيجة
السابقة (قوة وعزم)
الناتجة من A

$\Sigma F = -600\ N$

$\Sigma M_B = M_A + 600 * 4.8$

$= -\cancel{1}880 + 2880$

$= \cancel{1}1000\ N.m$

لاننا نحسب عزم FA على النقطة C

لاحظ انه (X من C ← A)

(C) $\Sigma F = -600$

$\Sigma M_C = 0 = M_A + \vec{X} * -600$

$= -\cancel{1}880 + 600X = 0$

$600X = \cancel{1}880$

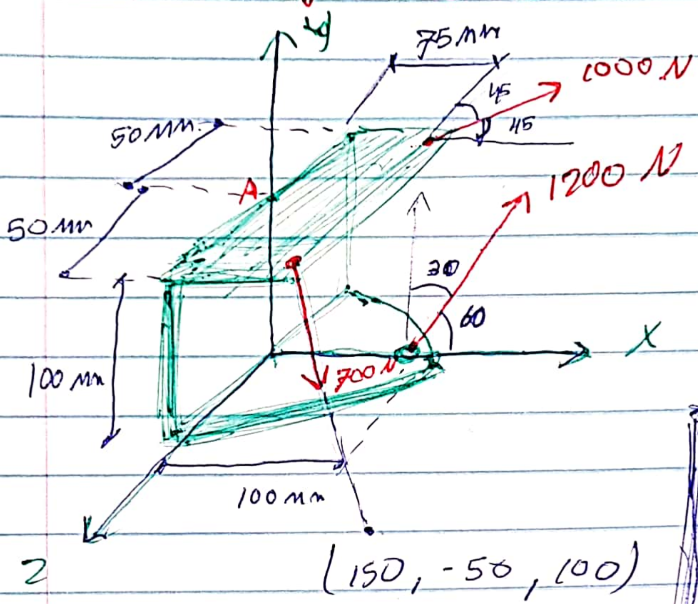
~~X = 3.133 m~~

~~X = 1.66 m~~

$X = 3.133$

تذكر انه
مش دايما بنرجع
نحولهم لقوة وحده

Sample Problems



three cables are attached to the brackets as shown. Replace the forces with an equivalent force-couple at A

$$F_1 = \frac{1000}{\sqrt{2}}\hat{i} - \frac{1000}{\sqrt{2}}\hat{k}$$

$$\boxed{F_1 = 707.1\,\hat{i} - 707.1\,\hat{k}}$$

$$F_2 = 1200\cos 30\,\hat{j} + 1200\cos 60\,\hat{i}$$

$$\boxed{F_2 = 1039.2\,\hat{j} + 600\,\hat{i}}$$

$$F_3 = |F_3|\,\hat{\lambda}$$

$$= 700 * \left(\frac{75\hat{i} - 150\hat{j} + 50\hat{k}}{175}\right)$$

$$\boxed{F_3 = 300\,\hat{i} - 600\,\hat{j} + 200\,\hat{k}}$$

$$M_1 = 707.1 * 0.075\,\hat{j} - 707.1 * 0.05\,\hat{j}$$

$$\boxed{M_1 = 17.68\,\hat{j}}$$

$$M_2 = 1039.2 * 0.1 + 600 * 0.1$$

$$\boxed{M_2 = 163.9\,\hat{k}}$$

$$M_3 = \begin{array}{c} \\ r \\ F \end{array}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ .075 & & .05 \\ 300 & -600 & 200 \end{vmatrix} =$$

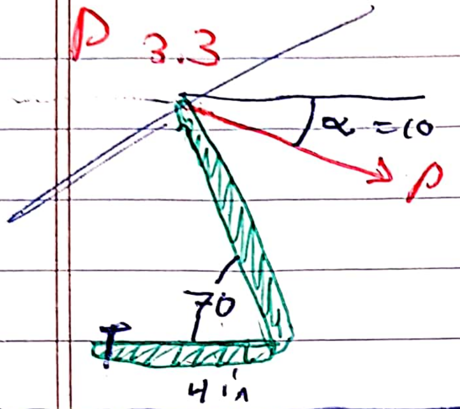
$$\boxed{M_3 = \hat{i}(30) + 0\,\hat{j} - (45)\hat{k}}$$

$$\Sigma F = 1607.1\,\hat{i} + 439.2\,\hat{j} - 507.1\,\hat{k}$$

$$M = 30\,\hat{i} + 17.68\,\hat{j} + 118.9\,\hat{k}$$

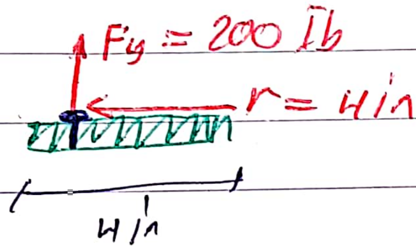
Home work 2

P 3.3



200 Ib $\hat{j}$ to remove the nail starts moving then F on the nail = 200 Ib $\hat{j}$

(A)

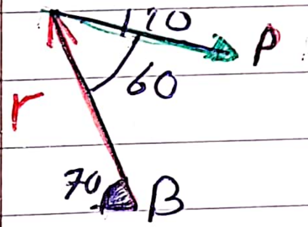


$M_B = \vec{r} \times \vec{F}$

$= 4\text{ in} * 200 * \sin 90$

$= \boxed{800 \text{ Ib.in Clockwise or in } -Z \text{ direct.}}$

(B)



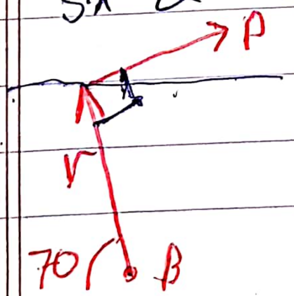
$M_B = \vec{r} \times \vec{F}$

$= 18\text{ in} * P * \sin(120)$

$800\text{ Ib.in} = 18\text{ in} * P * 0.866$

$\boxed{P = 51.32 \text{ Ib}}$ in its shown direction

C) the smallest needed force is when $\sin\theta = \sin 90 = 1$



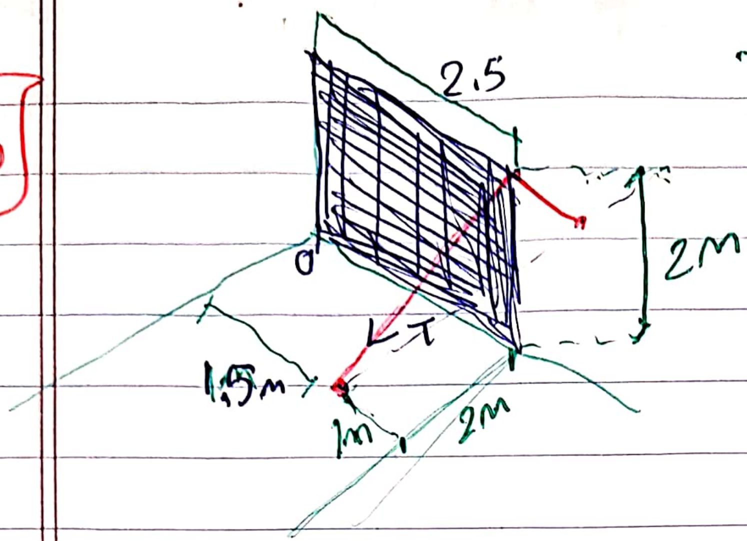
$M_B = \vec{r} \times \vec{F}$

$\Rightarrow 800 = 18 * P * \sin 90$

$P = 44.44 \text{ Ib}$ at angle 20 counter clock wise of x^+

or 15.2 Ib $\hat{j}$ + 41.[illegible] $\hat{i}$

26



$T_{BD} = 900\ N$

$\overrightarrow{BD} = -1\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$

$|BD| = \sqrt{1+4+4} = 3m$

$$\overrightarrow{T}_{BD} = \frac{\overrightarrow{BD}}{|BD|} * |T|$$

$$T_{BD} = \left(\frac{-\hat{i}}{3} - \frac{2\hat{j}}{3} + \frac{2\hat{k}}{3}\right)(900)$$

$$\overrightarrow{T}_{BD} = -300\hat{i} - 600\hat{j} + 600\hat{k}$$

$$r_{OB} = 2.5m\hat{i} + 2m\hat{j}$$

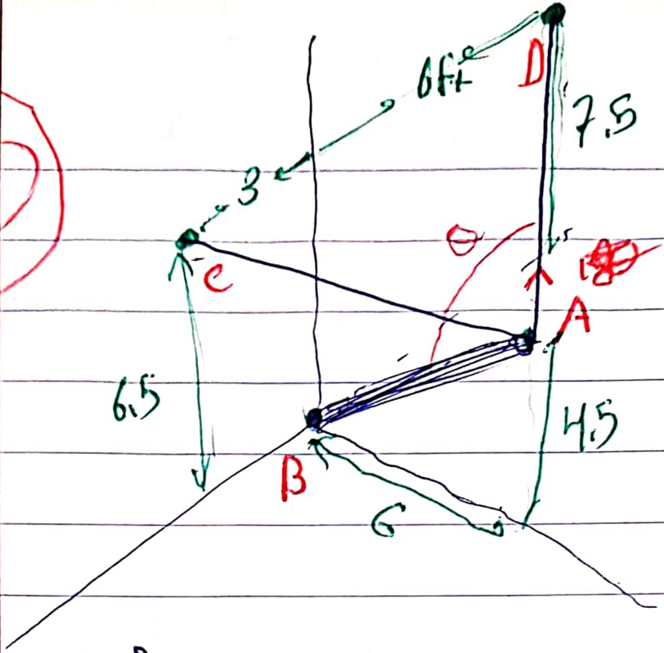
$$M_B = r \times T_{BD} \quad \begin{vmatrix} +\hat{i} & -\hat{j} & +\hat{k} \\ 2.5 & 2 & 0 \\ -300 & -600 & 600 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(1200) - \hat{j}(1500) + \hat{k}(-1500 + 600)$$

$$= (1200\hat{i} - 1500\hat{j} + 900\hat{k})\ N.m$$

40

TAD 180



(A)

$\vec{AD} = -6\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$

$|AD| = 9$

$\vec{AB} = -6\hat{i} - 4.5\hat{j} + 0K$

$|AB| = \sqrt{36 + 4.5^2} = 7.5$

$\vec{AD} \cdot \vec{AB} = |AD||AB| \cos \theta$

$+36 - 13.5 + 0 = 9 * 7.5 * \cos\theta$

$22.5 = 67.5 \cos\theta$

$\cos\theta = \frac{1}{3} = 0.3333$

$\theta \approx 70.5^\circ$

B

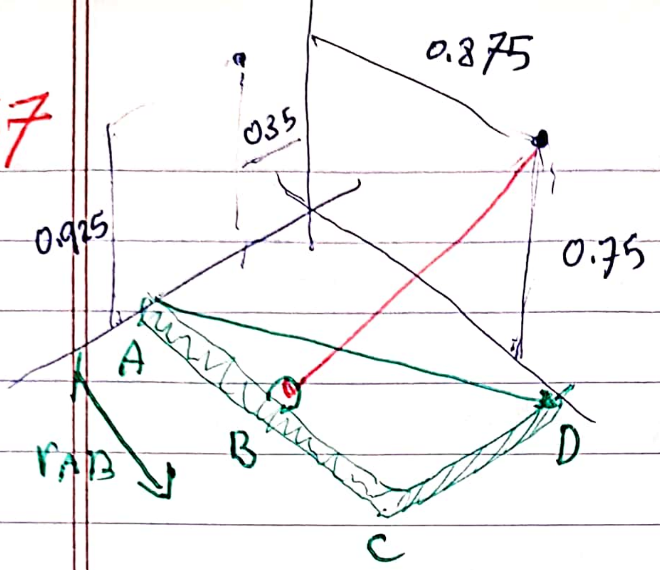
~~TAKE TAD = [illegible]~~

~~TAD = [illegible]~~

the Projection on AB $= T_{AD} \cos\theta = \frac{\vec{T_{AD}} \cdot \vec{AB}}{|AB|}$

$= 180\ Ib * \frac{1}{3} = 60\ Ib$

57



$\overrightarrow{BH} = 0.375\hat{i}$
$+ 0.75\hat{k}$
$+ 0.75\hat{j}$

$|BH| = 1.125$ m

First lets find the needed information

$$T_{AH} = |T|\frac{\overrightarrow{BH}}{BH} = \frac{450}{1.125} * (0.375\hat{i} + 0.75\hat{j} - 0.75\hat{k})$$

$$\boxed{T_{BH} = (150\hat{i} + 300\hat{j} - 300\hat{k})\ N}$$

$$\boxed{r_{A\to B} = 0.5\hat{i}\ m}$$

$$\lambda(AD) = \frac{\overrightarrow{AD}}{|AD|} \qquad \frac{\hat{i} - 0.75K}{1.25}$$

$$\boxed{\lambda(AD) = 0.8\hat{i} - 0.6\hat{k}}$$

$$M_{AD} = \begin{vmatrix} 0.8 & 0 & -0.6 \\ 0.5 & +0 & -0 \\ 150 & 300 & -300 \end{vmatrix}$$

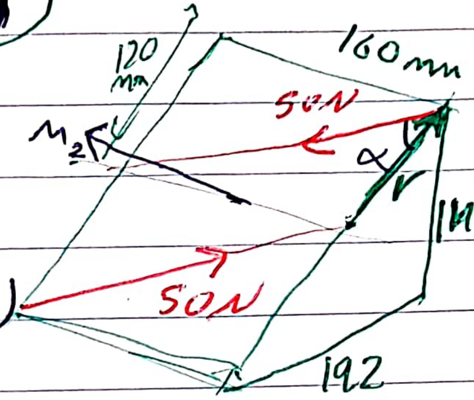
$$= 0 + 0 - 0.5(0 + 180)$$

$$= -90\ N.M$$

78 $M_1 = 12.5 * 192*10^{-3} \sin 90 \; -\hat{K}$

$\boxed{M_1 = -2.4 \; N.M}$

$|M_2| = \cancel{50N*} \; F X R$



$= 50 * 120*10^{-3} * \sin(180-\alpha)$

$= 6 \sin\alpha = 6 * \frac{160}{\sqrt{120^2+160^2}} = 6*0.8$

$|M_2| = 4.8 \; N.M$

the direction of $M_2 = \lambda_{M_2}$

λ_{M_2} = a unit vector that is perpendicular to the surface which means it's perpendicular to vectors $\vec{DC}$ & $\vec{DB}$

$\lambda_{M_2} = \frac{\vec{DB} \times \vec{DC}}{|DB||DC| \sin 90} = \frac{(144\hat{i} - 192\hat{k}) \times -160\hat{i}}{38400}$

$\boxed{\lambda_{M_2} = 0.6\hat{k} + 0.8\hat{j}}$

$\vec{M_2} = |M_2| \lambda_{M_2} = 2.88\hat{k} + 3.84\hat{j}$

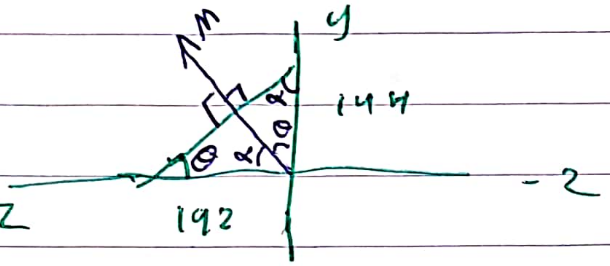
$\vec{M_1} + \vec{M_2} = 2.88\hat{k} + 1.44\hat{j}$

$|M_{net}| = 3.22 \; \{ \; \theta_x = 90 \; / \; \theta_y = 63.4$

$\theta_x = \cos^{-1} \frac{M_x}{M}$ the same for all $\quad \theta_z = 26.6$

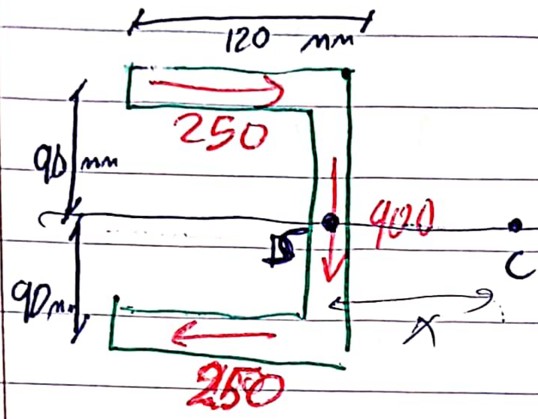
CamScanner الممسوحة ضوئيا بـ

in the Q 78 ~~last~~ Page we could take the angles eazily by taking only the ~~x~~ zy plane as shown



what is the shear force?

P 87

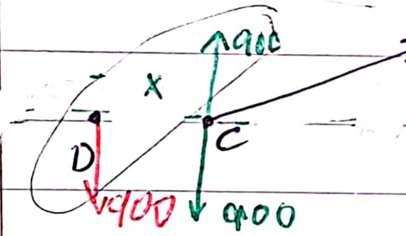


first make it a force and couble system at point (S)

~~to move~~

$$\boxed{M_S = 250 * 180 \times 10^{-3} = -45 \text{ N.m } \hat{k}}$$

do move a force F we need to add two other forces -F & F at the new point



$M_C = (-45 + FX)$

$$\boxed{F_{net} = 900}$$

$M_C = M_S + 900X$

$M_C = 0 = -45 + 900X$

$900X = 45$

$X = \frac{45}{900}$

$X = 0.05 \text{ m}$

$= 5 \text{ CM}$

F = 900 N Downward at distance 5 cm from (AD)

Answer

I made the point D because the question asked ~~about~~ fore the distance from $\overline{BD}$ to C and point S is on $\overline{BD}$

$|R|$ $R = |R| \hat{\lambda}_{B \to C}$

$= 21.2 \text{ lb} \left(\frac{42}{106} \hat{i} - \frac{96}{106} \hat{j} - \frac{16}{106} \hat{k} \right)$

$|R| * \quad 0.396 \hat{i} - 0.906 \hat{j} - 0.151 \hat{k}$

$\vec{R} = (8.4 \hat{i} - 19.2 \hat{j} - 3.2 \hat{k})$

$\vec{M} = |M| \hat{\lambda}_{C \to B} = |M| (-0.396 \hat{i} + 0.906 \hat{j} + 0.151 \hat{k})$

$\vec{M} = (-5.25 \hat{i} + 12 \hat{j} + 2 \hat{k})$ (lb.ft)

At point A $\quad R_{net} = \vec{R}$

$M_A = \vec{M} + \vec{R} \times \vec{r}_{A \to B}$

$r_{AB} = 96 \hat{j} + 64 \hat{k}$

$$\vec{R} \times r_{AB} = \begin{vmatrix} +\hat{i} & -\hat{j} & +\hat{k} \\ 0 & 96 & 64 \\ 8.4 & -19.2 & -3.2 \end{vmatrix} \text{ lb.in}$$

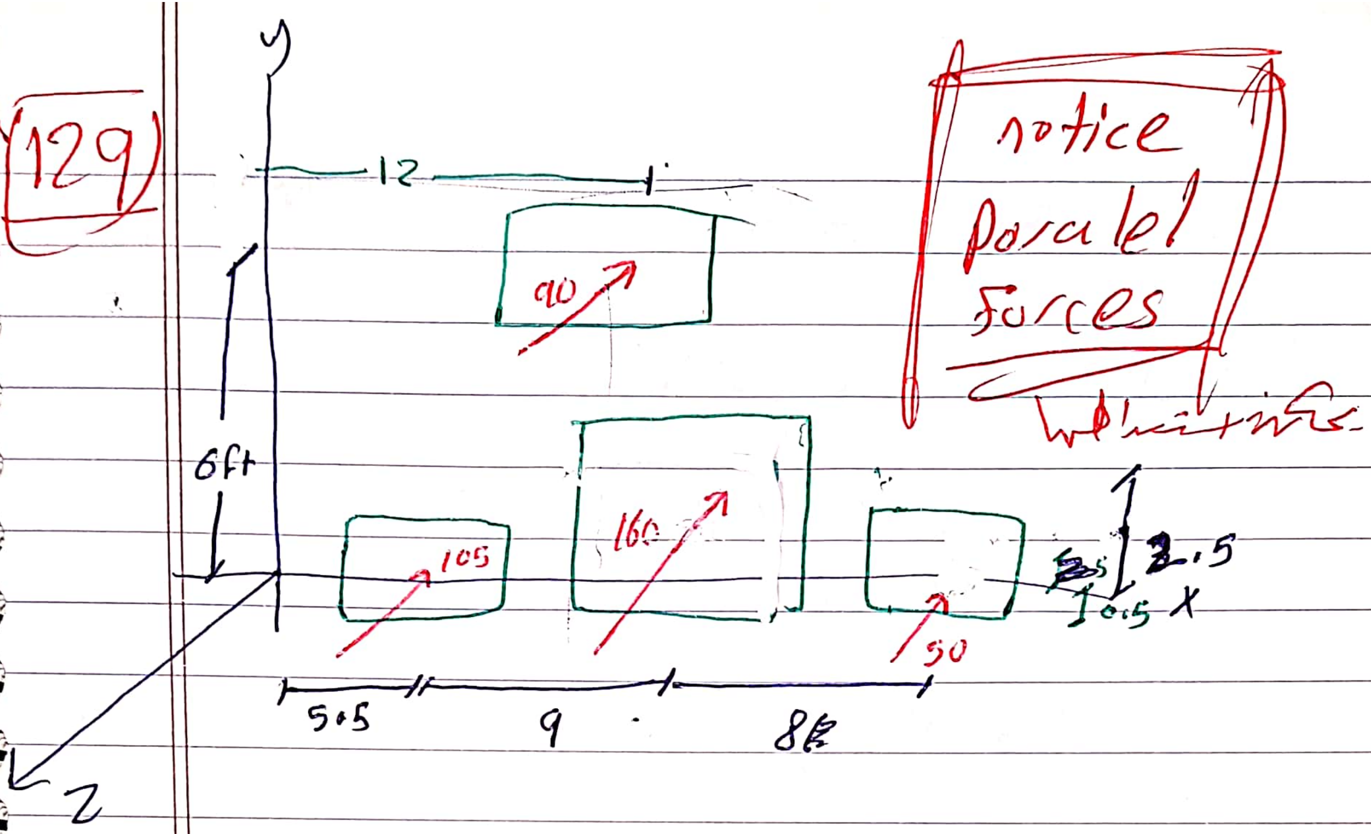
$\vec{R} \times \vec{r}_{AB} = (\hat{i}(921.6) + \hat{j}(537.6) - (806.4)\hat{k})$ lb.in

to make it in lb.ft we divide on 12

$R \times r = (76.8 \hat{i} + 44.8 \hat{j} - 67.2 \hat{k})$ lb.in

$M = R \times r_{AB} + \vec{M} = (71.55 \hat{i} + 56.8 \hat{j} - 65.2)$

(129)



$\Sigma F = -405 \text{ Ib } \hat{k}$

$\boxed{\text{supose point (P) } (x, y, 0)}$ that ΣM on it $= 0$

find M on poin (0,0,0)

~~M on point (0,0,0)~~ =

$\Sigma M_{y_0} = 90 * 12 + 105 * 5.5 + 160 * 14.5 + 22.5 * 50$

$\Sigma M_{y_0} = +5102.5 \text{ Ib. ft}$

$\Sigma M_{x_0} = -(90 * 6 + 160 * 3 + 50 * 0.5)$

$= -955$

Map on Point $P = 0$

$0 = M_{x0} + \vec{X} \times \vec{F}$

$-955 + (\vec{X}) \times (-405 \hat{k}) = 0$

$955 = 405 X = 2.45 M$

~~$M_{py} = 0 = M_{oy} + 405\, y(-1$~~

$M_{py} = 0 = M_{oy} + (y\hat{j} \times -405\hat{k})$

$+5102.5 = +y * 405$

$y = 12.6\hat{j}$

the point is $(2.45, 12.6, 0)$

~~which means 2.45~~

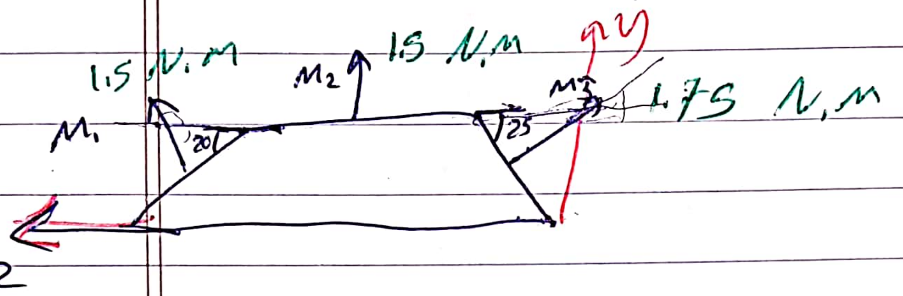
I did not notic the axis and the origin so

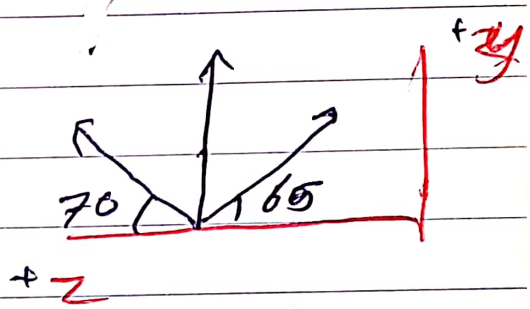
it will be at point

$(+2.45, 7.6, 0)$

as the origin in the question

153 coples are perpendicular to surfaces then they are in yz plane





$M_1 = 0.51\,\hat{k} + 1.41\,\hat{j}$

$M_2 = 1.5\,\hat{j}$

$M_3 = 1.59\,\hat{j} + {}^-0.781\,\hat{k}$

$\sum M = (-0.32\,\hat{k} + 4.5\,\hat{j})$ N.m

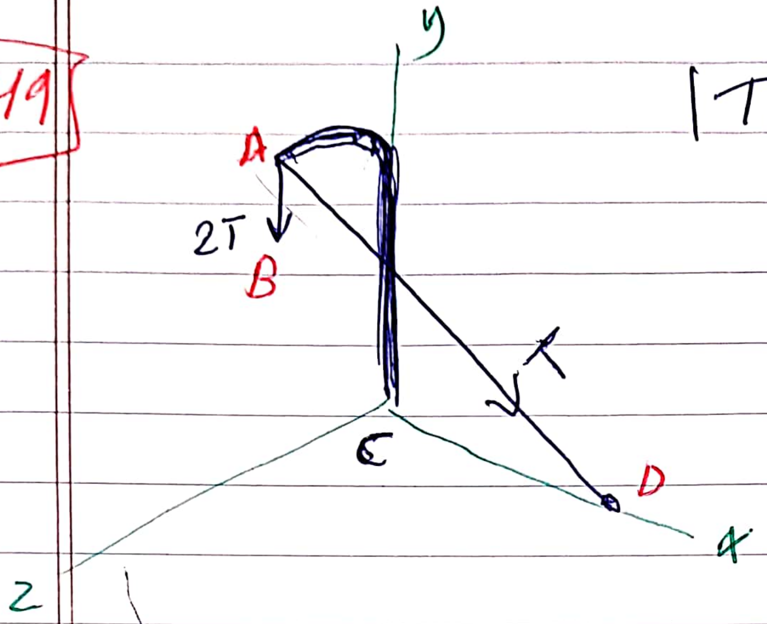
$|M| = 4.511$ N.m

$\cos\theta_x = \frac{M_x}{M} = \frac{0}{M} = 0 \rightarrow \theta_x = 90°$

$\cos\theta_y = \frac{M_y}{M} = 0.997 \Rightarrow \theta_y = 4.06°$

$\cos\theta_z = \frac{M_z}{M} = -0.071 \Rightarrow \theta_z = 94.1°$

149



$|T| = 82 \text{ lb}$

$F_{AD} = |T| \, \lambda_{AD}$

$\lambda_{AD} = \dfrac{+6\hat{i} \cancel{+} 7.75\hat{j} - 3\hat{k}}{10.25}$

$F_{AD} = (48\hat{i} - 62\hat{j} - 24\hat{k}) \text{ lb}$

$\Sigma F = F_{AD} - 2|T|\hat{j}$

$R_A = F_{net} = (48\hat{i} - 226\hat{j} - 24\hat{k}) \text{ lb}$

$R_{C \to A} = (7.75\hat{j} + 3\hat{k}) \text{ ft}$

$M_C = \vec{r}_{CA} \times \vec{F}_A$

$$= \begin{vmatrix} +\hat{i} & -\hat{j} & +\hat{k} \\ 0 & 7.75 & 3 \\ 48 & -226 & -24 \end{vmatrix} =$$

492

$M_C = (492\hat{i} + 144\hat{j} - 372\hat{k}) \text{ lb.ft}$